विध्न विचारत भीरु जन, नहीं आरम्भे काम,
विपति देख छोड़े तुरंत मध्यम मन कर श्याम।
पुरुष सिंह संकल्प कर, सहते विपति अनेक,
'बना' न छोड़े ध्येय को, रघुबर राखे टेक।।

*रचितः मानव धर्म प्रणेता*
*सद्गुरु श्री रणछोड़दासजी महाराज*

# सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Numbers)

*The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain........... Hadamard gacques*

## सम्मिश्र संख्या निकाय (The complex number system)

भारतीय गणितज्ञ 'महावीर' (850 A.D.) अपनी रचना 'गणितसार संग्रह' में यह लिखने वाले प्रथम व्यक्ति थे कि वस्तुओं की प्रकृति की तरह कोई ऋणात्मक संया पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। इसलिये इसका कोई वर्गमूल नहीं होता है अतः ऐसी कोई वास्तविक संख्या x नहीं है जो बहुपत समीकरण $x^2 + 1 = 0$ को संतुष्ट करे।

समीकरण $x^2 + 1 = 0$ का हल देने वाले लिये $\sqrt{-1}$ के लिये एक प्रतीक जिसे अंग्रेजी के i अक्षर द्वारा प्रदर्शित करते है, स्विट्जरलैण्ड के गणितज्ञ लियोनार्ड यूलर द्वारा 1748 में दिया गया। i को एक काल्पनिक संया माना गया जिस पर एक वास्तविक संख्या की तरह बीजगणितीय संक्रयाएं की जा सकती है। i अक्षर से $\sqrt{-1}$ को प्रदर्शित किया गया; सम्भवतः इसलिए क्योंकि i लैटिन शब्द 'imaginarius' का पहला अक्षर है।

ऐसी बहुपदीय समीकरणों को हल प्रदान करने के लिये सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय को परिभाषित किया गया है। हम a + bi के रूप की संख्या को सम्मिश्र संख्या कहते है जहां a व b वास्तविक संख्याएं है। इसे z से प्रदर्शित किया जाता है। अर्थात z = a + ib 'a' को z का वास्तविक भाग जिसे (Rez) तथा 'b' को काल्पनिक भाग जिसे (Imz) द्वारा निरूपित करते है।
कोई सम्मिश्र संख्या
(i) विशुद्ध वास्तविक है, यदि b = 0 हो।
(ii) विशुद्ध काल्पनिक है, यदि a = 0 हो।
(iii) काल्पनिक है, यदि $b \neq 0$ हो।

---

**नोट :**
(a) वास्तविक संख्याओं का समुच्चय R समुच्चय R संख्याओं का उचित उपसमुच्चय है। अतः सम्पूर्ण संख्या निकाय $N \subset W \subset I \subset Q \subset R \subset C$ है।
(b) शून्य शुद्ध वास्तविक एवं विशुद्ध काल्पनिक है लेकिन काल्पनिक नहीं है।
(c) $i = \sqrt{-1}$ को काल्पनिक इकाई कहा जाता है।
तथा $i^2 = -1$; $1^3 = -i$; $i^4 = 1$ इत्यादि
(d) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ये केवल तभी सम्भव है जब कम से कम a या b में से ऋणात्मक नहीं हो।
(e) यदि z = a + ib हो, तो a - ib को z का संयुग्मी सम्मिश्र कहा जाता है जिसे $\bar{z} = a - ib$ लिखा जाता है।
(f) वास्तविक संख्याएं क्रम सम्बन्ध को संतुष्ट करती है परन्तु काल्पनिक संख्याएं क्रम सम्बन्ध को संतुष्ट नहीं है अर्थात् $i > 0$, $3 + i < 2$ अर्थ हीन है।

---

## बीजगणितीय संक्रियाएँ (Algebraic Operations)

**सम्मिश्र संख्याओं की मूलभूत संक्रियाऐं**

सम्मिश्र संया में संक्रिया लगाने के लिए हम वास्तविक संख्याओं, की बीजगणित का उपयोग करते है, $i^2$ को -1 प्रतिस्थापित करते है जब यह प्राप्त होता हो।

1. योग $(a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$

2. व्यवकलन $(a + bi) - c + di) = a + bi - c - di = (a - c) + (b - d)i$

3. गुणन $(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci = bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4. विभाजन $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-bi}{c-di} = \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - d^2i^2}$

$$= \frac{ac + db + (bc - ad)i}{c^2 - d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

सम्मिश्र संख्याओं में असमिकाएश परिभाषित नहीं है। यदि हम कहे कि सम्मिश्र संख्या धनात्मक है या ऋणात्मक हो यह मान्य नहीं है।

उदाहरण : $z > 0, 4 + 2i + < 2 + 4i$ अर्थहीन है।

वास्तविक संख्याओं में यदि $a^2 + b^2 = 0$ हो, तो $a = 0 = b$ तथापि सम्मिश्र संख्याओं में $z_1^2 + z_2^2 = 0$ होने का मतलब $z_1 = z_2 = 0$ नहीं है।

---

## सम्मिश्र संख्याओं की तुल्यता (Equality In Complex Number):

दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = z_1 + ib_1$ और $z_2 = a_2 + ib_2$ बराबर है यदि और केवल यदि उनेक वास्तविक भाग एवं काल्पनिक भाग क्रमशः बराबर हो।

अर्थात् $z_1 = z_2 \quad \Rightarrow \quad Re(z_1) = Re(z_2)$ एवं $I_m(z_1) = I_m(z_2)$

---

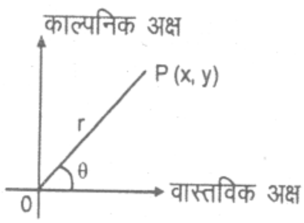
## सम्मिश्र संख्याओं का निरूपर (Representation of a complex number)

19वीं शताब्दी के प्रारम्भ में कार्ल फ्रेडरिक गौस (1777–1855 ) और विलियम रोवन हैमिल्टर (1805–1865) ने स्वतंत्र रूप से लगभग समान समय पर सम्मिश्र संख्याओं को दो वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म के रूप में परिभाषित करने का विचार रखा। अर्थात् ˙. पइ त्र ;ए इद्ध

प्रत्येक सम्मिश्र संया के लिए समतल में मात्र एक बिन्दु होता है और विलोमतः में प्रत्येक बिन्दु के लिए मात्र एक सम्मिश्र संख्या होती है। इसी कारण हम प्रायः सम्मिश्र संख्या z को बिन्दु z कहते है।

**(a) कार्तीय रूप (ज्यामितीय निरूपण) :**

प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $z = x + iy$ को एक बिन्दु द्वारा कार्तीय समतल पर क्रमित युग्म (x, y) से प्रदर्शित किया जाता है एवं इस कार्तीय समतल को सम्मिश्र समतल या आर्गण्ड समतल कहा जाता है।




लम्बाई OP को सम्मिश्र संया का मापांक कहते है जिसे $|z|$ से निरूपित कियाजाता है और $\theta$ को कोणांक कहा जाता है।

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ और $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ (धनात्मक x- अक्ष के साथ बनाया गया कोण OP)

---

**नोट :**

(i) सम्मिश्र संख्या का कोणांक एक बहुमानीय फलन है। यदि $\theta$ एक सम्मिश्र संख्या का कोणांक हो तो $2n\pi+\theta; n\in I$ भी उस सम्मिश्र संख्या का कोणांक ेगा। एक सम्मिश्र संख्या के किन्हीं दो कोणांकों के बीच का अन्तर $2n\pi$ होता है।

(ii) $\theta$ का अद्वितीय मान जो $-\pi<\theta\le\pi$ को संतुष्ट करता हो, कोणांक का मुख्य मान कहलाता है। दूसरे शब्दों में कोणांक (z), कोणांक का मुख्य मान कहलाता है।

(iii) एक सम्मिश्र संख्या को उसके कोणांक एवं मापांक से परिभाषित किया जाता है। सम्मिश्र संख्या 0 + i0 के लिए कोणांक परिभाषित नहीं है एवं यह केवल एक सम्मिश्र संख्या है जिसे इसके मापांक से परिभाषित किया जाता है।

---

**(b) त्रिकोणीय / ध्रुवीय निरूपण :**

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ जहाँ $|z| = r$; कोणांक $z = \theta$ ; $\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

---

**टिप्पणी :** $\cos\theta + i\sin\theta$ is also written as CiS $\theta$

---

**(c) ऑयलर का निरूपण :**

$z = re^{i\theta}; |z| = r;$ कोणांक $z = \theta; \bar{z} = re^{-i\theta}$

इस सूत्र की उपपत्ति वर्तमान परिचर्चा से परे है। विस्तार का प्रयोग करके इस सूत्र की उपपत्ति निम्नवत् दी जा सकती है।

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$$

$= i\,\theta$ रखने पर $e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots\ldots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \ldots\ldots\right) = \cos\theta + i\sin\theta.$

---

**नोट :** यदि $\theta$ वास्तविक है, तो $\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + \theta^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

---

**(d) सदिशीय निरूपण :**

प्रत्येक सम्मिण संख्या को किसी बिन्दु के स्थिति सदिश के रूप में निरूपित किया जाता है। यदि कोई बिन्दु p सम्मिश्र संया z को प्रदर्शित करे तो $\vec{OP} = z$ और $|\vec{OP}| = |z|$.

---

## सम्मिश्र संख्या का कोणांक (Argument of a Complex Number(

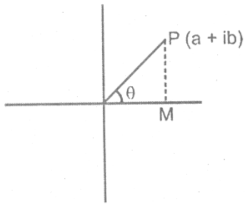
अशून्य सम्मिश्र संख्या P(z) का कोणांक को arg(z) से निरूपित किया जाता है।

arg z = OP द्वारा वास्तविक अक्ष धनात्मक दिशा से बनाया गया कोण

यदि OP = |z| = r और arg(z) = $\theta$ हो, तो स्वभाविक रूप से z = r(cos$\theta$ + isin$\theta$), को z का ध्रुवीय रूप कहा जाता है। इसका अर्थ है कि z का कोणांक, z के कोणांक का मुख्य मान होता है अर्थात् कोणांक $(-\pi, \pi]$ के बीच रहता है जब तक दूसरा प्रतिबंध नहीं हो। इस प्रकार सम्मिश्र संख्या z = a + ib = r(cos$\theta$ + i sin$\theta$) का कोणांक $\theta$ का वह मान है जो r cos$\theta$ = a और r sin$\theta$ = b को संतुष्ट करता है।

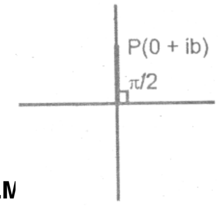
माना $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{b}{a}\right|$

(i) $a > 0, b > 0$



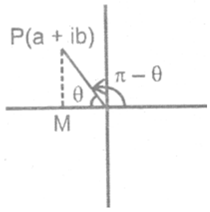

ख्य मान कोणांक z = $\theta$

(ii) $a = 0, b > 0$




मुख्य मान कोणांक $z = \frac{\pi}{2}$

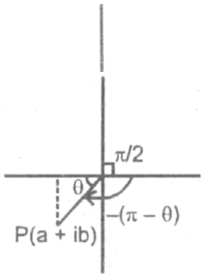
(iii) $a < 0, b > 0$




मुख्य मान कोणांक $z = \pi - \theta$

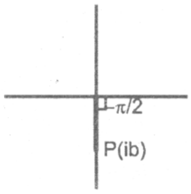
(iv) $a < 0, b = 0$ मुख्य ज्ञात कोणांक $z = \pi$

(v) $a < 0, b < 0$



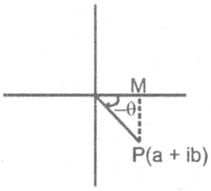

मुख्य मान कोणांक $z = -\ (\pi - \theta)$

(vi) $a = 0, b < 0$



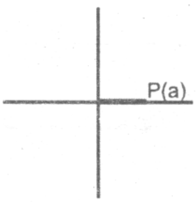

मुख्य मान कोणांक $z = -\frac{\pi}{2}$

(vii) $a > 0, b < 0$




मुख्य मान कोणांक $z = -\ \theta$

(viii) $a > 0, b = 0$

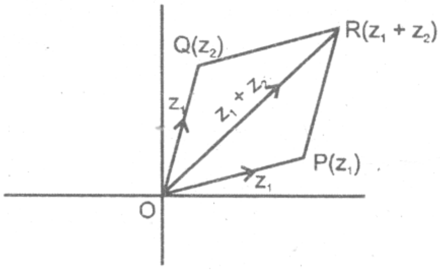



मुख्य मान कोणांक $z = 0$

---

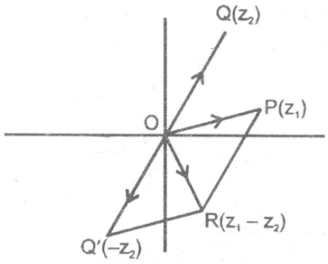
## मूलभूत संक्रियाओं का ज्यामितीय निरूपण
**(Geometrical Representation of Fundamental Operations(**

**(i) योग का ज्यामितिय निरूपण (Geometrical representation of addition)**




यदि दो बिन्दु P व Q क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं $z_1$ व $z_2$ को को आर्गण्ड समतल पर निरूपित करते है, तो $z_1 + z_2$, OP व OQ भुजा वाले समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण OR के अन्त्य बिन्दु R द्वारा निरूपित होता है।

**(ii) अन्तर का ज्यामितीय निरूपण (Geometric reprentation of substraction)**




(iii) **दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल के मापांक एवं कोणांक**
**(Modulus and argument of multiplication of two complex numbers)**

---

**प्रमेय** : किन्ही दो सम्मिश्र संख्याओं $z_1$ व $z_2$ के लिए $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$ और कोणांक $(z_1z_2)$ = कोणांक $(z_1)$ + कोणांक $(z_2)$.

**Proof :** $z_1 = r_1\, e^{i\theta}$ , $z_2 = e^{i\theta_2}$

$z_1z_2 = r_2r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$\Rightarrow$ $|z_1z_2| = |z_1|\,|z_2|$

कोणांक $(z_1z_2)$ = कोणांक $(z_1)$ + कोणांक $(z_2)$

अर्थात दो सम्मिश्र संख्याओं को गुणा करने के लिए हम उनके निपरेक्ष मानों को गुणा करते है तथा उनके कोणांकों को जोड़ते है।

**नोट** : (i) P.V. कोणांक $(z_1z_2) \neq$ P.V. कोणांक $(z_1)$ + P.V. कोणांक $(z_2)$ (P.V. Principal value मुख्यामानd )

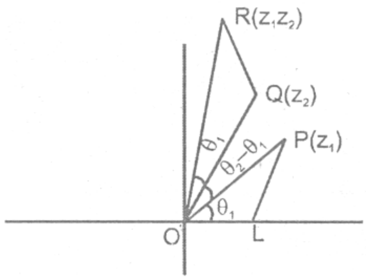
(ii) $|z_1z_2 \ldots\ldots z_n| = |z_1|\,|z_2| \ldots\ldots |z_n|$

(iii) कोणांक $(z_1z_2 \ldots\ldots z_n)$ = कोणांक $z_1$ + कोणांक $z_2$ + ...... + कोणांक $z_n$

---

**(iv) सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल का ज्यामितिय निरूपण**
**(Geometrical representation of multiplication of compelx numbers)**

माना P,Q क्रमशः $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = e_2\ e^{i\theta_2}$ द्वारा प्रदर्शित है। बिन्दु R प्रापत करने के लिए जो कि सम्मिश्र संख्या $z_1z_2$ को निरूपित करता है। हम वास्तविक अक्ष पर एक बिन्दु L इस प्रकार लेते है कि OL = 1 और एक त्रिभुज OQR खींचते है जो कि त्रिभुज OLP के समरूप है। इस प्रकार




$\frac{OR}{OQ} = \frac{OP}{OL} \Rightarrow OR = OPOQ$ अर्थात् $OR = r_1r_2$ और $QOR = \theta_1$

$L\hat{O}R = L\hat{O}R + P\hat{O}Q + Q\hat{O}R = \theta_1 + \theta_2 - \theta_1 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2$

अतः R, $z_1z_2$ द्वारा प्रदर्शित है $= r_1r_2\ e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

---

**(v) दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल का मापांक एवं कोणांक**
**(Modulus and argument of division of two complex numbers)**

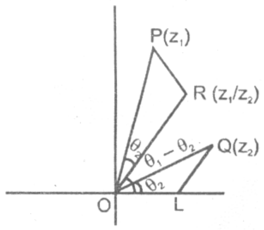
**प्रमेय** : यदि $z_1$ और $z_2$ $(\neq 0)$ दो सम्मिश्र संख्याएं है तो $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ और

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

नोट : P.V. arg $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \neq$ P.V.arg$(z_1)$ – P.V.arg$(z_2)$ P.V. arg $(z_1)$ - P.V. arg $(z_2)$

---

**(vi) सम्मिश्र संख्याओं के भागफल का ज्यामितीय निरूपण**
**(Geometrical representation of the division of complex numbers)**

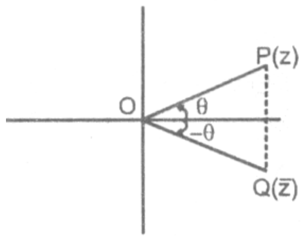



माना P, Q क्रमशः $z_1 = r_2 e^{i\theta_1}$ , $z_2 = z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ द्वारा प्रदर्शित है। सम्मिश्र संख्या $\frac{z_1}{z_2}$ को प्रदर्शित करने वाले बिन्दु R को प्राप्त करने के लिए, हम वास्तविक अक्ष पर बिन्दु L इस प्रकार लेते है कि OL = 1 और त्रिभुज OPR खींचते है जोकि त्रिभुज OQL के समरूप है।
इस प्रकार $\frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{OL}$ $\Rightarrow$ या $\frac{r_1}{r_2}$ और $L\hat{O}R = L\hat{O}P - R\hat{O}P = \theta_1 - \theta_2$ अतः
$R, \frac{z_1}{z_2}$ द्वारा प्रदर्शित है $= \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

## सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी (Conjugate of a complex Number)

**सम्मिश्र संख्या** $z = a + b$ का संयुग्मी $\overline{z} = a - ib$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।
यदि किसी सम्मिश्र संख्या में i को - i से प्रतिस्थापित कर दिया जाए आर्गण्ड समतल में वास्तविक अक्ष के सापेक्ष z का दर्पण प्रतिबिम्ब होता है, अर्थात $\overline{z}$ सम्मिश्र संख्या z का वास्तविक अक्ष के सापेक्ष प्रतिबिम्ब होता है।

**सम्मिश्र संख्या के संयुग्मी का ज्यामितीय निरूपण**
**(Geometrical representation of conjugate of compex number)**




$|z| = |\overline{z}|$
arg $(\overline{z})$ = - arg (z)
arg $(\overline{z})$ का व्यापक मान = $2n\pi$ - P.V. arg (z)
**गुणधर्म**

(i) यदि $z = x + iy$ तो $x = \frac{z - \overline{z}}{2}, y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
(ii) $z = \overline{z}$ $\Rightarrow$ z पूर्णतयः वास्तविक है
(iii) $z + \overline{z} = 0$ $\Rightarrow$ z पूर्णतयः काल्पनिक है
(iv) मापांक एवं संयुग्मी के मध्य सम्बन्ध $|z|^2 = z\overline{z}$
(v) $\overline{\overline{z}} = z$
(vi) $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z}_1 \pm \overline{z}_2$
(vii) $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$
(viii) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{(\overline{z})}{(\overline{z}_2)} (z_2 \neq 0)$

**प्रमेय :** वास्तविक गुणांको वाली बहुपदीय समीकरण के काल्पनीय मूल संयुग्मी युग्म के रूप के होते है।

**Proof :** यदि $z_0$ समीकरण $a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + ..... + a_{n-1} z + a_n = 0$ का एक मूल है।
$a_0, a_1, .........a_n \in R$ तो $a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + ....... + a_{n-1} z_0 + a_n = 0$

गुणधर्म (vi) व (vii) का प्रयोग करने पर $a_0 \overline{z}_0^n + a_1 \overline{z}_0^{n-1} + ........ + a_{n-1} \overline{z}_0 + a_n = 0$

$\Rightarrow$ $\overline{z}_0$ भी एक मूल है।

**नोट :** यदि $w = f(z)$, तो $\overline{w} = f(\overline{z})$

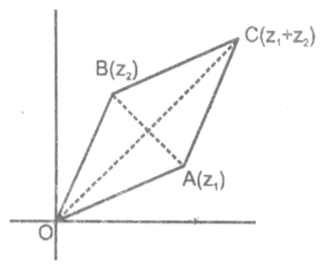
**प्रमेय :** $|z_1 \pm z2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm (z_1 \overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2)$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2\,\text{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 \pm 2|z_1||z_2|\cos(\theta_1 - \theta_2)$$

## दूरी, त्रिभुजीय असमिका (Distance, Triangular Inequality)

यदि $z_1 = z\backslash x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ तो आर्गण्ड समतल में $z_1, z_2$ के मध्य दूरी

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$




त्रिभुज OAC में

$OC \le OA + AC$
$OA \le AC + OC$
$AC \le OA + OC$

इस असमिकाओं का प्रयोग करने पर $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

इसी प्रकार त्रिभुज OAB से

हम जानते है कि $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$

**नोट :**

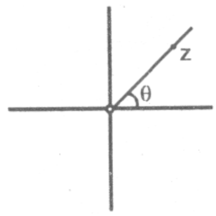
(a) $||z_1| - |z_2|| = |z_1 + z_2|$, $|z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$ यदि और केवल यदि मूल बिन्दु $z_1$ और $z_2$ संरेख है और मूलबिन्दू $z_1$ और $z_2$ संरेख है और मूलबिन्दु $z_1$ और $z_2$ के मध्य है।

(b) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, $||z_1| - |z_2|| = |z_1 - z_2|$ यदि और केवल यदि मूल बिन्दु $z_1$ और $z_2$ संरेख है और $z_1$ और $z_2$ मूल बिन्दु से एक ही दिशा में स्थित है।

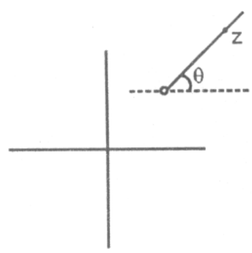
## घूर्णन (Rotation)

**महत्वपूर्ण निष्कर्ष :**

(i) $\arg z = \theta$ वास्तविक अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ $\theta$ काण बनाने वाली तथा मूल बिन्दु से निकलने वाली किरण पर स्थित बिन्दुओं अशून्य को प्रदर्शित करता है।



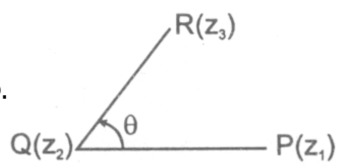

(ii) $\arg(z - z_1) = \theta$ वास्तविक अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ $\theta$ कोण बनाने वाली तथा $z_1$ से निकलने वाली किरण पर स्थित बिन्दुओं $(\ne z_1)$ को प्रदर्शित करता है।




## घूर्णन प्रमेय (Rotation theorem)

(i) यदि $P(z_1)$ और $Q(z_2)$ दो सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है $|z_1| = |z_2|$ तो $z_2 = z_1\, e^{i\theta}$ जहां $\theta = \angle POQ$

(ii) यदि $P(z_1)$, $Q(z_2)$ और $R(z_3)$ तीन सम्मिश्र संख्याएं और $\angle PQR = \theta$ तो $\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) = \left|\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right| e^{i\theta}$

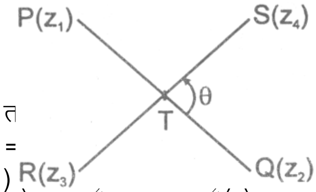


(iii) यदि $P(z_1)$, $Q(z_2)$, $R(z_3)$ और $S(z_4)$ चार सम्मिश्र संख्याएं है और $\angle STQ = \theta$ तो $\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_2} = \left|\frac{z_3 - z_4}{z_1 - z_2}\right| e^{i\theta}$

## द्:मायवर प्रमेय (Demolvres Theorem)

**स्थिति** I

**कथन :**




यदि n कोई पूर्णांक संख्या हो, त

(i) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n =$

(ii) $(\cos\theta_1 + i\, i\sin\theta_1)$ ... $i\sin\theta_2)(\cos\theta_3 + \sin\theta_3)\ .......\ (\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

$= \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ......\theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + ....... + \theta_n)$

---

**स्थिति** II

**कथन** : यदि $p, q \in Z$ एवं $q \neq 0$ हो, तो

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{p/q} = \cos\left(\frac{2k\pi + p\theta}{q}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi + p\theta}{q}\right)$$

जहाँ $k = 0, 1, 2, 3, ....., q - 1$

---

नोट : **किसी सम्मिश्र राशि के मूलों का क्रमित गुणनफल को समीकरण सिद्धांत का प्रयोग करके ज्ञात करना चाहिए।**

---

## इकाई के घनमूल (Cube Root of Unity)

(i) इकाई के घनमूल $1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

(ii) यदि इकाई के काल्पनिक घनमूलों में से एक $\omega$ हो तो $1 + \omega + \omega^2 = 0$ होता है। सामान्य रूप में $1 + \omega^r + \omega^{2r} = 0$, जहाँ $r \in I$ लेकिन r, 3 का गुणन न जो।

(iii) इकाई के घनमूलों का ध्रुवीय रूप : $\cos 0 + i\sin 0; \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}, \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$

(iv) जब इकाई के तीनो घनमूलों को किसी आर्गड समतल में निरूपित किया जाता हो, तो वे एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष को निरूपित करते है।

(v) निम्नलिखित गुणनखण्डों को याद रखना चाहिए –

(b b, c ∈ R और $\omega$ इकाई का घनमूल है।) ; $x^2 + x + 1 = (x - \omega)\ ; (x - \omega^2)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a + \omega b)(a + \omega b)$ ; $x^2 + ab + b^2 = (a - bw)(a - bw^2)$

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$

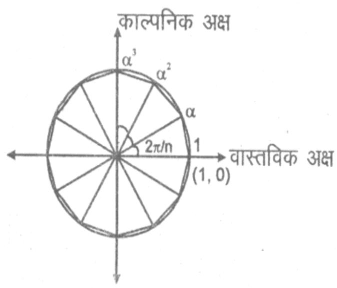
---

## इकाई का नवाँ मूल ($n^{th}$ Roots of Unity)

यदि इकाई के n वें, n मूल $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .....\alpha_{n-1}$ है।

(i) ये गु.श्रे. में है जिसका सार्व अनुपात $e^{i(2\pi/n)}$

(ii) $1^p + \alpha_1^P + 6\alpha_2^P + ..... + \alpha_{n-1}^P = 0$ यदि p, n का पूर्णांक गुणज नहीं हो



= n, यदि p, n का पूर्णांक गुणज हो।

(iii) $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)..........(1-\alpha_{n-1}) = n$ और
$(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)......(1+\alpha_{n-1}) + 0$ यदि n सम हो, 1 यदि n विषम ो।

(iv) $1.\theta_1.\alpha_2.\alpha_3......\alpha_{n-1} = 1$ = 1 या -1, n विषम और सम होने के अनुसार ।

---

## निम्नलिखित श्रेणियों के योग फल को याद रखना चाहिए।
## (The Sum Of the Following Series Should Be Remembered)

(i) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + ....+ \cos n\theta$ त्र $\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\cos\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\theta.$

(ii) $\sin\theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta + ..... + \sin n\theta$ त्र $\dfrac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\sin\left(\dfrac{n+1}{2}\right)\theta.$

---

**नोट :** यदि $\theta = (2\pi/n)$ हो, तो इन उपरोक्त श्रेणियों के योगफल शून्य होते है।

---

## सम्मिश्र संख्या का लघुगणक (Logarithm Of A Complex Quantity)

(i) $\text{Log}_e(\theta + i\beta) = \dfrac{1}{2}\text{Log}_e(\alpha^2+\beta^2) + i\left(2n\pi + \tan^{-1}\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$ जहाँ $n \in I.$

(ii) $e^{-\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}, n \in I$ द्वारा निरूपित की जाने वाली धनात्मक वास्तविक संख्याओं के सुच्चय को $i^i$ से प्रदर्शित किया जाता है।

---

## ज्यामितीय गुणधर्म (Geometrical Properties)

**दूरी सूत्र :**
यदि दो बिन्दुओं P और Q को क्रमशः $z_1$ और $z_2$ से प्रदर्शित किया जाता हो, तो दोनों के मध्य दूरी = $|z_1 - z_2|$.

**विभाजन सूत्र :**
यदि दो बिन्दुओं p और Q को क्रमशः $z_1$ और $z_2$ से प्रदर्शित करते है तथा बिन्दु C रेखाखण्ड PQ को m : n में अन्तः विभाजन करता है, तो C को $z = \dfrac{mz_2 + nz_1}{m+n}$ से प्रदर्शित करते है।

यदि PQ को बिन्दु C, m : n में बाह्य विभाजन करता हो, तो $z = \dfrac{mz_2 - nz_1}{m-n}$

---

**नोट :** यदि तीन वास्तविक संख्याएँ a, b, c इस प्रकार है कि $az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$ जहाँ $a + b + c = 0$ एवं a, b, c एक साथ शून्य नहीं हो, तो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1$, $z_2$ और $z_3$ संरेखीय है।

---

(1) यदि त्रिभुज के शीर्षों A,B और C को क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं $z_1$, $z_2$ और $z_3$ से प्रदर्शित किया जाता हो तथा भुजाओं की लम्बाईयों को a,b,c से निरूपित किया जाता हो, तो

(i) त्रिभुज ABC का केन्द्र $= \dfrac{z_1+z_2+z_3}{3}$ :

(ii) $\Delta$ ABC का लम्बकेन्द्र $= \dfrac{(a\sec A)z_1 + (b\sec)z_2 + (c\sec)z_3}{a\sec A + b\sec + c\sec C}$ या $\dfrac{z_1\tan A + z_2\tan B + z_3\tan C}{\tan A + \tan B + \tan C}$

(iii) $\Delta$ ABC का अंतः केन्द्र = $(az_1 + bz_2 + cz_3) \div (a + b + c)$

(iv) $\Delta$ ABC का परिकेन्द्र = $(Z_1 \sin 2A + Z_2 \sin 2B + Z_3 \sin 2C) \div (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$.

(2) कोणांक (z) = $\theta$ मूल बिन्दु से निकलने वाली किरण जो एक x - अक्ष से कोण $\theta$ बनाती है।

(3) a को b से मिलाने वाली रेखा का लम्ब समद्विभाजक | z - a | - | z - b | है।

(4) $z_1$ और $z_2$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण $z = z_1 + t\,(z_1 - z_2)$ द्वारा दिया जाता है। जहाँ t एक वास्तविक प्राचल है।

(5) $z = z_1\,(1 + it)$, जहाँ t एक वास्तविक प्राचल है, एक ऐसी रेखा है जो $z_1$ और मूलबिन्दु को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् हो तथा $z_1$ से गुजरती हो।

(6) बिन्दु $z_1$ और $z_2$ से गुजरने वाली रेखा के समीकरण को सारणिक रूप में $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ प्रदर्शित किया जा सकता है। यह तीन सम्मिश्र संख्याओं $z$, $z_1$ एवं $z_2$ के संरेखीय होने का प्रतिबंध है। उपरोक्त समीकरण को सरल करने पर $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + r = 0$ जहाँ r वास्तविक एवं $\alpha$ अशून्य सम्मिश्र रूप से प्राप्त होती है।

---

**नोट :** यदि z को $ze^{i\theta}$ और $\bar{z}$ को $\bar{z}e^{-i\theta}$ से प्रतिस्थापित कर दिया जा तो हमें सरल रेखा का समीकरण प्राप्त होता है जो मूल बिन्दु से सरल रेखा पर डाले गए लम्ब के पाद से गजरती हो और दी गई रंखा से कोण $\theta$ बनाती हो।

---

(7) केन्द्र $z_0$ और त्रिज्या $\rho$ वाले वृत का समीकरण $|z - z_0| = \rho$ या $z\bar{z} - z_0\bar{z} - \bar{z}_0 z + \bar{z}_0 z_0 - \rho^2 = 0$ है जो कि $z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + k = 0, k$ वास्तविक संख्या है, केन्द्र $-\alpha$ और त्रिज्या $= \sqrt{\alpha\bar{\alpha} - k}$ है वृत वास्तविक होगा यदि $\alpha\bar{\alpha} - k \ge 0 ...$ हो।

(8) $z_1$ और $z_2$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को व्यास लेकर बनाये गए वृत का समीकरण कोणांक $\left(\dfrac{z - z_2}{z - z_1}\right) = \pm\dfrac{\pi}{2}$ या $(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_2) + (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_1) = 0$ है।

(9) दिये गए चार बिन्दुओं $z_1, z_2, z_3$ और $z_4$ के संवृतीय होने के लिए प्रतिबन्ध है कि संख्या $\dfrac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\cdot\dfrac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$ वास्तविक होनी चाहिए। अतः तीन असंरेखीय बिन्दुओं $z_1, z_2$ एवं $z_3$ से गुजरने वाले वृत के समीकरण के लिए $\dfrac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)}$ वास्तविक है।

$$\Rightarrow \quad \frac{(z - z_2)(z_3 - z_1)}{(z - z_1)(z_3 - z_2)} = \frac{(\bar{z} - \bar{z}_2)(\bar{z}_3 - \bar{z}_1)}{(\bar{z} - \bar{z}_1)(\bar{z}_3 - \bar{z}_2)}$$

(10) कोणांक $\frac{(z - z_1)}{(z - z_2)} = \theta$

(i) कोण रेखा को प्रदर्शित करता है यदि $\theta = \pi$
(ii) दो किरणों के युग्म को प्रदर्शित करता है यदि $\theta = 0$
(iii) एक वृत के एक भाग को प्रदर्शित करता है यदि $0 < \theta < \pi$.

(11) बिन्दुओं $z_1, z_2$ और $z_3$ से निर्मित किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल $\left|\frac{1}{4i}\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$ है।

(12) बिन्दु $z_0$ से रेखा $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + r = 0$ की लम्बवत दूरी $\frac{|\bar{\alpha}z_0 + \alpha\bar{z}_0 + r|}{2|\alpha|}$ है।

(13) (i) रेखा $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + r = 0$ का सम्मिश्र ढाल $\omega = -\frac{\alpha}{\alpha}$ है।

(ii) बिन्दुओं $z_1$ और $z_2$ को मिलाने वाली रेखा का सम्मिश्र ढाल $\omega = \frac{z_1 - z_2}{z_1 - \bar{z}_2}$

(iii) वास्तविक अक्ष से $\theta$ कोण बनाने वाली रेखा का सम्मिश्र ढाल $= e^{2i\theta}$ है।

(14) **बिन्दु गुणन एवं सदिश गुणन**

माना $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ को सम्मिश्र संख्याएं है (सदिश) $z_1$ व $z_2$ का बिन्दु गुणन (अदिश गुणन) निम्नवत् परिभाषित है।

$$z_1 \bullet z_2 = |z_1||z_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = \text{Re}\{\bar{z}_1z_2\} = \frac{1}{2}\{\bar{z}_1z_2 + z_1\bar{z}_2\}$$

जहां $\theta$ $z_1$ तथा $z_2$ के मध्य कोण है जो 0 व $\theta$ के मध्य स्थित है।

यदि सदिश $z_1, z_2$ लम्बवत् है तो $z_1 \bullet z_2 \Longrightarrow \frac{z_1}{z_1} + \frac{z_2}{z_2} = 0.$

अर्थात् सम्मिश्र ढालों का योग = 0

$z_1$ व $z_2$ का सदिश गुणन निम्नवत् परिभाषित है।

$$z_1 + z_2 = |z_1|\,|z_2| \sin\theta = x_1y_2 - y_1x_2 = \text{Im}\{\bar{z}_1z_2\} = \frac{1}{2i}\{\bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2\}$$

यदि सदिश $z_1, z_2$ समान्तर है तो $z_1 + z_2 = 0 \Rightarrow \frac{z_1}{z_1} = \frac{z_2}{z_2}$

अर्थात सम्मिश्र ढालें समान है।

---

**नोट :** $\omega_1$ और $\omega_2$ दो रेखाओं के सम्मिश्र ढाल है–
(i) यदि रेखाएं समान्तर है तो $\omega_1 = \omega_2$
(ii) यदि रेखाएं लम्बवत् हैं तो $\omega_1 + \omega_2 = 0$

---

(15) यदि $|z - z_1| + |z - z_2| = K > |z_1 - z_2|$ हो, तो z का बिन्दुपथ एक रेसा दीर्घवृत है जिसकी नाभियाँ $z_1$ और $z_2$ है।

(16) यदि $|z - z_0| = \left|\frac{\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + r}{2|\alpha|}\right|$ हो, तो z का बिन्दुपथ एक ऐसा परवलय है जिसकी नाभि $z_0$ है और नियता $\overline{\alpha}z_0 + \overline{\alpha}z_0 + r = 0$ (दिया है $\overline{\alpha}z_0 + \alpha\overline{z}_0 + r \neq 0$)

(17) यदि $\left|\frac{z - z}{z - z_2}\right| = k \neq 1,0$ हो, तो z का बिन्दुपथ एक वृत है।

(18) यदि $||z - z_1| - |z - z_2|| = K < |z_1 - z_2|$ हो, तो z का बिन्दुपथ एक ऐसा अतिपरवलय है जिसकी नाभियाँ क्रमशः $z_1$ और $z_2$ है।

---

**निम्नलिखित का मिलान कीजिये :**

| | स्तम्भ -I | | स्तम्भ - I |
|---|---|---|---|
| (i) | यदि $|z - 3+2i| - |z + i| = 0$ हो तो तब z का बिन्दुपथ प्रदर्शित करता है– | (i) | वृत्त\| |
| (ii) | यदि कोणांक $\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{4}$ हो? तो z का बिन्दुपथ प्रदर्शित करता है – | (ii) | सरल रेखा\| |
| (iii) | यदि $|z - 8 - 2i| + z - 5 - 6i| = 5$ तो z का बिन्दुपथ प्रदर्शित करता है– | (iii) | दीर्घवृत्त\| |
| (iv) | यदि कोणांक $\left(\frac{z-3+4i}{z+2-5i}\right) = \frac{5\pi}{6}$, तो z का बिन्दुपथ प्रदर्शित करता है– | (iv) | अतिपरवलय\| |
| (v) | यदि $|z - 1| + |z + i| = 10$ हो, तो z का बिन्दुपथ प्रदर्शित करता है –\| | (v) | दीर्घ अक्ष\| |
| (vi) | यदि $|z - 3 + i| - | + 2 - i| = 1$ z का बिन्दुपथ प्रदश्रित करता है– | (v) | लघु अक्ष |
| (vii) | $|z - 3i| = 25$ | (vi) | रेखा का लम्ब समद्विभाजक\| |
| (viii) | कोणांक $\left(\frac{z-3+5i}{z+i}\right) = \pi$ | (vii) | रेखाखण्ड\| |

| Ans. | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | (i) | (ii) | (iii) | (iv) | (v) | (vi) | (vii) | (viii) |
| | II | (vii) | (v) | (viii) | (vi) | (iii) | (iv) | (i) | (viii) |

---

**(a) सरल रेखा के लिए प्रतिबिम्ब बिन्दु :**
दो बिन्दु P एवं Q एक दी गई सरल रेखा के प्रतिबिम्ब बिन्दु होते है यदि दी गई रेखा PQ की लम्ब समद्विभाजक हो। यदि दोनों बिन्दु सम्मिश्र संख्या $z_1$ और $z_2$ द्वारा प्रदर्शित है। तब $z_1$ तथा $z_2$ द्वारा प्रदर्शित है। तब $z_1$ तथा $z_2$ रेखा $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + r = 0$ के प्रतिबिम्ब बिन्दु होते है। यदि और केवल यदि $\overline{\alpha}z_1 + \alpha\overline{z}_2 + r = 0$ जहाँ r वास्तवकि है तथा हं अशून्य सम्मिश्र अचर है।

**(b) वृत्त के सापेक्ष प्रतिलोग बिन्दु :**
दो बिन्दु P एवं Q किसी वृत्त जिसका केन्द्र O एवं त्रिज्या $\rho$ है, के सापेक्ष प्रतिलोम कहलाते है, यदि

(i) बिन्दु O, P एवं Q संरेखीय है और P,Q केन्द्र O के एक ही ओर स्थित है।

(ii) OP, OQ = $\rho^2$.

---

**नोटः** दो बिन्दु $z_1$ और $z_2$ वृत $z\bar{z} + \bar{a}z + \alpha\bar{z} + r = 0$ के सापेक्ष प्रतिलोम बिन्दु होगें यदि और केवल यदि $z_1\bar{z}_2 + \bar{\alpha}z_1 + \alpha\bar{z}_2 + r = 0$.

---

## पालमी प्रमेय (Ptolomy's Theorem)

यह प्रमेय बताता है कि किसी वृत के अंदर खींचे गये अवतल चर्तुभूज के विकार्णों की लम्बाईयों का गुणनफल, उसकी सम्मुख भुजाओं की लम्बाईयों के गुणनफल के योगफल के बराबर होता है अर्थात

$| z_1 - z_3 | | z_2 - z_4 | = |z_1 - z_2 | z_3 - z_4 | + | z_1 - z_4 | | z_2 - z_3|$.

# Exercise - 1

**1- A** (बहुविकल्पीय प्रश्न)

**केवल एक विकल्प सही**

**1.** यदि सम्मिश्र संख्या z इस प्रकार है कि |z| = 4 तथा zrg(z) = $\frac{5\pi}{6}$ हो, तो z =

(A) $-2\sqrt{3} + 2i$ (B) $2\sqrt{3} + i$ (C) $2\sqrt{3} = 2i$ (D) $-\sqrt{3} + i$

**2.** सम्मिश्र संख्या $\sin\frac{6\pi}{5} + i\left(1 + \cos\frac{6\pi}{5}\right)$ का कोणांक है–

(A) $\frac{6\pi}{2}$ (B) $\frac{5\pi}{6}$ (C) $\frac{9\pi}{10}$ (D) $\frac{2\pi}{5}$

**3.** सम्मिश्र समतल में बिन्दु $z_1, z_2, z_3, z_4$ एक क्रम में लेने पर किसी समान्तर चतुर्भुज के शीष्र बिन्दु होगें यदि और केवल यदि –

(A) $z_1 + z_4 = z_2 + z_3$ (B) $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ (C) $z_1 + z_2 = z_3 + z_4$ (D) इनमें से कोई नहीं

**4.** $Re(z_2) = 4$ के द्वारा प्रदर्शित वक्र है–

(A) परवलय (B) दीर्घवृत (C) वृत (D) आयतीत अतिपरवलय

**5.** असमिका |z -4| < |z - 2| प्रदर्शित करती है–

(A) Re(z) > 0 (B) Re(z) < 0 (C) Re(z) > 2 (D) Re(z) > 3

**6.** समीकरण निकाय $Re(z_2) = 0$, |z| = 2 के हलों की संख्या हे–

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

**7.** यदि z ($\neq$ -1) एक सम्मिश्र संख्या दस प्रकार है कि $\frac{z-1}{z+1}$ विशुद्ध काल्पनिक है, तो |z| का मान है–

(A) 1 (B) 3 (C) 2 (D) 1

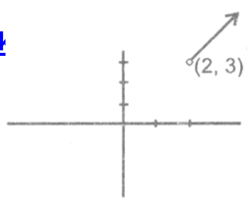
**8.** समीकरण $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या z = x + iy जिस वक्र पर स्थित है, वह है–

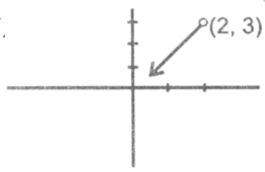
(A) x-अक्ष (B) सरल रेखा y = 5
(C) मूल बिन्दु से गुजरने वाला वृत (D) y-अक्ष

**9.** यदि $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ हो तथ एक समबाहु त्रिभुज के शीर्ष $z_1, z_2, z_3$ हो, तो –

(A) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (B) $z_1z_2z_3 = 1$
(C) $z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

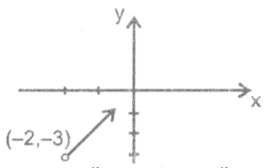
**10.** यदि z - 2 - 3i का कोणांक $\frac{\pi}{4}$ हो, तो z का बिन्दुपथ है–



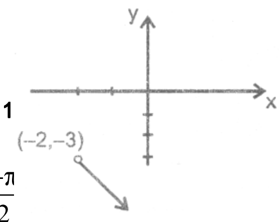



(A) (B)

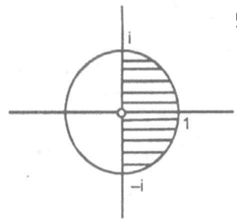
(C)




(D)




1 खांकित व्यतः प्रदर्शित है–




(A) $|z| \le 1, \frac{-\pi}{2} \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ द्वारा (B) $|z| = 1, \frac{-\pi}{2}$

(C) $|z| \ge 0,\ 0 \le \arg z \le \frac{\pi}{2}$ द्वारा (D) $|z| \le 1, \frac{\pi}{2} \le \arg z \le \pi$ द्वारा

**12.** यदि एक वृत्त $|z| = 2$ के अंतर्गत बनाए गए समबाहु त्रिभुज के शीर्ष $z_1, z_2, z_3$ हो तथा $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ हो, तो–

(A) $z_2 = -2.\ z_3 = 1 + i\sqrt{3}$ (B) $z_2 = 2,\ z_3 = 1 - i\sqrt{3}$

(C) $z_2 = -2,\ z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ (D) $z_2 = 1 - i\sqrt{3},\ z_3 = -1 - i\sqrt{3}$

**13.** यदि $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) \ldots (\cos n\theta + i\sin n\theta) = 2$ हो, तो $\theta$ का मान है–

(A) $4m\pi, m \in Z$ (B) $\frac{2m\pi}{n(n+1)}, m \in Z$ (C) $\frac{4m\pi}{n(n+1)}, m \in Z$ (D) $\frac{m\pi}{n(n+1)}, m \in Z$

**14.** यदि $x = a + b + c,\ y = a\alpha + b\beta + c$ तथा $z = a\beta + b\alpha + c$, जहाँ $\alpha$ व $\beta$ इकाई के सम्मिश्र घनमूल हो, तो xyz =

(A) $2(a^3 b^3 + c^3)$ (B) $2(a^3 - b^3 - c^3)$ (C) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ (D) $a^3 - b^3 - c^3$

**15.** समीकरण $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 2$ प्रदर्शित करता है–

(A) इकाई त्रिज्या का एक वृत (B) एक सरल रेखा

(C) क्रमित युग्म (0, 0) (D) इनमें से कोई नहीं

**16.** आर्गण्ड समतल में $|z - 1| + ||z + 1| \le 4$ से प्रदर्शित करता है–

(A) दीर्घवृत के अन्दर का क्षेत्रफल (B) वृत के बाहर का क्षेत्रफल

(C) दीर्घवृत की सीमा तथा अन्तर का क्षेत्रफल (D) इनमें से कोई नहीं

**17.** माना इकाई के दो अवास्तविक घनमूल $z_1$ व $z_2$ है तथा $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 = \lambda$ उस वृत को प्रदर्शित करता है जिसके व्यास के सिरे $z_1$ व $z_2$ हो, तो $\lambda$ का मान है–

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) $\sqrt{2}$

**18.** $|z| = \text{Re}(z) + 2$ द्वारा प्रदर्शित वक्र है–

(A) सरल रेखा (B) वृत (C) दीर्घवृत (D) परवलय

---

**एक सक अधिक विकल्प सही**

**19.** यदि $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$ हो, तो–

(A) $\frac{z_1}{z_2}$ विशुद्ध वास्तविक है। (B) $\frac{z_1}{z_2}$ विशुद्ध काल्पनिक है।

(C) $z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 = 0$ (D) कोणांक $\frac{z_1}{z_2}$ का मान $\frac{\pi}{2}$ के बराबर हो सकता है।

**20.** समीकरण $|z - i| + |z + i| = k, k > 0$, प्रदर्शित कर सकती है–

(A) एक दीर्घवृत यदि $k > 2$ (B) रेखा खण्ड यदि $k = 2$
(C) एक दीर्घवृत यदि $k = 5$ (D) रेखा खण्ड यदि $k = 1$

**21.** समीकरण $||z + i| - |z - i|| = k$ प्रदर्शित करती है–
(A) एक अतिपरवलय यदि $0 < k < 2$ (B) एक किरण युग्म यदि $k > 2$
(C) एक सरल रेखा यदि $k = 0$ (D) एक किरण युग्म यदि $k = 2$

**22.** मूलबिन्दु O से गुजरने वाली रेखा POQ है। P तथा Q सम्मिश्र संख्याओं $a + i\,b$, $c + i\,d$ को प्रदर्शित करते है तथा OP = OQ है। तब–
(A) $|a + i\,b| = |c + i\,d|$ (B) $a + c = b + d$
(C) कोणांक $(a + i\,b)$ = कोणांक $(c + i\,d)$ (D) इनमें से कोई नहीं

**23.** यदि z असमिका $|z - 1 - 2i| \le 1$ को संतुष्ट करता हो, तो–
(A) न्यूनतम (कोणांक (z)) = $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (B) अधिकतम (कोणांक (z)) = $\frac{\pi}{2}$
(C) न्यूनतम (|z|) = $\sqrt{5} - 1$ (D) अधिकतम (|z|) = $\sqrt{5} + 1$

1-B (विषयात्मक प्रश्न)

**1.** x तथा y के वास्तवकि मान ज्ञात करें जिसके लिये निम्नलिखित समीकरण संतुष्ट होती है–
$$\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3+i} = i$$

**2.** निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के मापांकण कोणांक व कोणांक का मुख्य मान ज्ञात कीजिए।
(a) $z = 1 + \cos\frac{18\pi}{25} + i\sin\frac{18\pi}{25}$ (b) $z = -2\,(\cos 30^0 + i\ \sin 30^0)$

**3.** निम्नलिखित का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।
(i) 7 + 24 I (ii) 4 + 3I

**4.** निम्नलिखित को सरल कीजिए और परिणमा को a + bi के रूप में व्यक्त कीजिए।
(a) $-i\,(9 + 6\,i)\,(2 - o)^{-1}$ (b) $\left(\frac{4i^3 - i}{2i + 1}\right)^2$ (c) $\frac{1}{(1 - \cos\theta) + 2\,i\sin\theta}$

**5.** यदि $|z - 2| = 2\,|z - 1|$, जहां z एक सम्मिश्र संख्या है, तो सिद्ध कीजिये। $|z|^2 = \frac{4}{3}\text{Re}(z)$ using
(i) z का धुव्रीय रूप प्रयोग करके (ii) z = z + iy, प्रयोक करके (iii) मापांक, कोणांक के गुणधर्म प्रयोग करके

**6.** यदि z = z + iy एक सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $z = (a + ib)^2$ तो
(i) $\bar{z}$ ज्ञात करें (ii) दर्शाइये कि $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^2$

**7.** दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1$, $z_2$ तथा दो वास्तविक संख्याएँ a,b है तो दर्शाइये कि
$|az_1 - bz_2|^2 + |bz_1 + az_3|^2 = (z^2 + b^2)\,|(z_2)|^2)$

**8.** निम्नलिखित व्यंजकों के $z \in C$ के अनुसार बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
(a) $1 < |z - 2i| < 3$ (b) $\text{Im}(z) \ge 1$ (c) $\text{Arg}(z - a) = \pi/3$ जहां $a = 3 + 4i$.

**9.** यदि $|z - 2 + i| = 2$ तो $|z|$ का अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

**10.** यदि $|z + 3| \le 3$ में निम्नलिखित का न्यूनतम एवं महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

(i) $|z|$ (ii) $|z - 1|$ (iii) $|z + 1|$

**11.** $\text{Re}(z) \le 2$, $\text{Im}(z) \le 2$ और $\frac{\pi}{8} \le \arg(z) \le \frac{3\pi}{8}$ के द्वाा प्रदर्शित भाग को दर्शाइये–

**12.** यदि $|z_1| = |z_2| = ..... = |z_n| = 1$ तो दर्शाइये कि

(i) $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$ (ii) $|z_1 + z_2 + ....... + z_n| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ..... + \frac{1}{z_n}\right|$.

औश्र इस प्रकार सिद्ध करें कि 2n शीर्षों $z_1, z_2, .....z_n$, $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2} ..... \frac{1}{z_n}$ (क्रम में होना आवश्यक नहीं) वाले

**13.** त्रिभुज के तीन शीर्ष सम्मिश्र संख्याओं $0, z_1, z_2$ और $z_2$ द्वारा प्रदर्शित है। यदि त्रिभुज समबाहु हो तो दर्शाइये कि $z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2$. यदि $z_0$ परिकेन्द्र है तो सिद्ध कीजिये $z_1^2 + z_2^2 = 3z_0^2$.

**14.** यदि O मूल बिन्दु है और P,Q,R क्रमशः $z$, $iz$, $z + iz$ द्वारा प्रदर्शित है तो बिन्दुओं को सम्मिश्र समतल पर दर्शाइये। यदि $\Delta$ POR = 200 तो (i) $|z|$ (ii) चर्तुशांश OPRQ की भुजाएं ज्ञात कीजिऐ।

**15.** यदि $(\sqrt{3} + i)^{100} = 2^{99}(a + ib)$ तो ज्ञात कीजिए –

(i) $a^2 + b^2$ (ii) $b$

**16.** यदि n धनात्मक पूर्णाक है तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिये –

(i) $(1 + \cos\theta + i\sin\theta)^n + (1 + \cos\theta - i\sin\theta) = 2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}$.

(ii) $(1 + i)^n + (1 - i)^n = 2^{\frac{n}{2}+1}.\cos\frac{2\pi}{4}$

**17.** $(z - 1)^4 - 16 = 0$ को हल कीजिये। मूलों का योग ज्ञात कीजिये। मूलों, मूलों के योग एवं मूलों से बने बहुभुज के केन्द्रक को सम्मिश्र समतल पर दर्शाइये।

**18.** यदि $x_r = \cos\left(\frac{\pi}{3r}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3^r}\right)$ हो, तो सिद्ध कीजिए $x_1x_2x_3$ ..... अनंत पदों तक $= i$

**19.** निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिये–

(i) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)^{3/4}$

इस प्रकार सतत् गुणनफल ज्ञात कीजिये यदि दो या अधिक भिन्न भिन्न मान हों।

**20.** माना I : $\text{Arg}\left(\frac{z - 8i}{z + 6}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$

II : $\text{Re}\left(\frac{z - 8i}{z + 6}\right) = 0$

दर्शाइये कि I या II में z का बिन्दुपथ $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$ पर स्थित है और इस प्रकार दर्शाइये कि z का बिन्दुपथ $\frac{z - 8i}{z + 6} + \frac{\bar{z} - 8i}{z + 6} = 0$ द्वारा भे प्रदर्शित है तथा यदि z का बिन्दुपथ $|z + 3 - 4i| = R$ द्वारा युक्त किया जाता है तो R का मान

ज्ञात कीजिये।

**21.** समीकरण $z\bar{z} + (4 - 3i)z + (4+ 3i)\ \bar{z} + 5 = 0$ एक वृत्त को प्रदर्शित करता है। इसकी त्रिज्या एवं केन्द्र ज्ञात कीजिये।

**22.** यदि $a = e^{i\alpha}, b = e^{i/\beta}, c = e^{i\gamma}$ और $\cos\theta + \cos\beta + \cos\gamma = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$, तो निम्नलिखित को सिद्ध कीजिये–

(i) $a + b + c = 0$ (ii) $ab + bc + ca = 0$

(iii) $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ (iv) $\Sigma \cos 2\alpha = 0 = \Sigma \sin 2\alpha$

(v) $\Sigma \sin^2 \alpha = \Sigma \cos^2 \alpha = 3/2$

# Exercise - 2

2-A (बहुविकल्पीय प्रश्न)

**केवल एक विकल्प सही**

**1.** $a \in R$ के उन मानों का समुच्चय जिसके लिए समीकरण $x^2 + i(a - 1)\ x + 5 = 0$ संयुग्मी काल्पनिक मूलों का युग्म रखती है

(A) R (B) {1}

(C) $|a|\ a^2 - 2a + 21 > 0\ \}$ (D) इनमें से कोई नहीं

**2.** $\sin^{-1}\left\{\frac{1}{i}(z-1)\right\}$ जहाँ z अवास्तविक है, त्रिभुज का कोण हो सकता है यदि –

(A) Re(z) = 1, Im(z) = 2 (B) Re(z) = 1, $-1 \le$ Im (z) $\le 1$

(C) Re(z) + Im(z) = 0 (D) इनमें से कोई नहीं

**3.** सम्मिश्र संख्या $z = 1 + \cos\left(\frac{11\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{9}\right)$ के कोणांक का मुख्य मान एवं मापांक (|z|) क्रमशः है–

(A) $\frac{11\pi}{18}, 2\cos\frac{\pi}{18}$ (B) $-\frac{7\pi}{18}, 2\cos\frac{7\pi}{18}$ (C) $\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{7\pi}{18}$ (D) $-\frac{\pi}{9}, -2\cos\frac{\pi}{18}$

**4.** यदि $z_1 = -3 + 5\ i$; $z_2 = -5 -3\ i$ हो तथा $Z_1$ व $z_2$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड पर स्थित सम्मिश्र संख्या z हो, तो arg(z) हो सकता है–

(A) $-\frac{3\pi}{4}$ (B) $-\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

**5.** यदि किसी गु.श्रे. का प्रथम पद तथा सार्व अनुपात $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$ हो, तो इसके n वें पद का निरपेक्ष मान है–

(A) 1 (B) $2^n$ (C) $4^n$ (D) इनमें से कोई नहीं

**6.** यदि $z = x + iy$ तथा $z^{1/3} = a - ib$ हो, तो $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k\left(a^2 - b^2\right)$ जहाँ k =

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**7.** माना सम्मिश्र समतल पर A, B, C क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2, z_3$ को प्रदर्शित करते है। यदि त्रिभुज ABC का परिकेन्द्र मूलबिन्दु पर हो, तो लम्ब केन्द्र को प्रदर्शित करने वाली सम्मिश्र संख्या है–

(A) $z_1 + z_2 - z_3$ (B) $z_2 + z_3 - z_1$ (C) $z_3 + z_1 - z_3$ (D) $z_1 + z_2 + z_3$

**8.** n का न्यूनतम धनात्म्क मान, जिसके लिए $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ वास्तविक हो, है–

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

**9.** यदि $(a + ib)^5 = \alpha + i\beta$ हो, तो $(b + ia)^5$ बराबर है–

(A) $\beta + i\alpha$ (B) $\alpha - i\beta$ (C) $\beta - i\alpha$ (D) $-\alpha - i\beta$

**10.** यदि $|z|$ = अधिकतम $\{|z - 1|, |z + 1|\}$ हो, तो–

(A) $|z + \bar{z}| = \frac{1}{2}$ (B) $z + \bar{z} = 1$ (C) $|z + \bar{z}| = 1$ (D) $z \in \phi$

**11.** यदि $|Z_1 = 1| < 1, |z_2 - 2| < 2, |z_3 - 3| < 3$ हो, तब $|z_1 + z_2 + z_3|$ का मान है–

(A) 6 से कम (B) 3 से कम (C) 12 से कम (D) 6 व 12 के मध्य

**12.** सदिश $z = -4 + 5i$ को वामावर्त दिशा में $180^0$ कोण पर घुमाया जाताहै तथा 1.5 गुणा विस्तारित कर दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त सदिश के संगत सम्मिश्र संख्या है–

(A) $6 - \frac{15}{2}i$ (B) $-6 + \frac{15}{2}i$ (C) $6 + \frac{15}{2}i$ (D) इनमें से कोई नहीं

**13.** समअष्टभुज के आसन्न शीर्ष $z_1$ एवं $z_2$ है तो $z_2$ के आसन्न शीर्ष $z_3(z_3 \neq z_1)$ को प्रदर्शित किया जा सकता है–

(A) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_1 + z_2)$ (B) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_1 - z_2)$

(C) $z_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm i)(z_2 - z_1)$ (D) इनमें से कोई नहीं

**14.** यदि $z_1$ और $z_2$ दो सम्मिश्र संख्याएं है तथा कोणांक $\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{\pi}{2}$ परन्तु $|z_1 + z_2| \neq |z_1 - z_2|$ हो तो बिन्दुओं $0, z_1, z_2$ और $z_1 + z_2$ से निर्मित आकृति है–

(A) एक समान्तर चतुर्भुज परन्तु आयत या समचतुर्भुज नहीं
(B) एक आयत परन्तु वर्ग नहीं
(C) एक समचतुर्भुज परन्तु वर्ग नहीं
(D) एक वर्ग

**15.** व्यंजक $\left[\frac{1 + i\tan\alpha}{1 - i\tan\alpha}\right]^n - \frac{1 - i\tan n\alpha}{1 - i\tan n\alpha}$ को सरलीकृत करने पर मान है–

(A) शून्य (B) $2 \sin n\alpha$ (C) $2 \cos n\alpha$ (D) इनमें से कोई नहीं

**16.** यदि $p = a + b\omega + c\omega^2$; $q = b + c\omega + a\omega^2$ एवं $r = c + a\omega + b\omega^2$ जहाँ $a, b, c \neq 0$ हो तथा इकाई का सम्मिश्र घनमूल $\omega$ हो तो–

(A) $p + q + r = a + b + c$ (B) $p^2 + q^2 + r^2 = a^2 + b^2 + c^2$
(C) $p^2 + q^2 + r^2 = 2(pq + qr + rp)$ (D) इनमें से कोई नहीं

**17.** यदि $x^2 + x + 1 = 0$ हो तो $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 + \left(x^4 + \frac{1}{x^4}\right)^2 + ...... + \left(x^{27} + \frac{1}{x^{27}}\right)^2$ का संख्यात्मक मान है–

(A) 54 (B) 36 (C) 27 (D) 18

**18.** यदि $\alpha$ अवास्तविक तथा $\alpha = \sqrt[5]{1}$ हो, तो $2^{|1+\alpha+\alpha^2+\alpha^{-2}-\alpha^{-1}|}$ का मान होगा –

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) इनमें से कोई नहीं

19 $\sum_{k=1}^{6}\left(\sin\frac{2\pi k}{1} - i\cos\frac{2\pi k}{7}\right)$ का मान है –

(A) -1 (B) 0 (C) -i (D) i

**20.** समीकरण $z^{10} - z^5 - 992 = 0$ के घन मूलों की संख्या जिनके वास्तविक भाग ऋणात्मक हो, है –

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

**21.** सम्मिश्र समतल में बिन्दु $z_1 = 3 + \sqrt{3}\ i$ एवं $z_2 = 2\sqrt{3} + 6\ i$ दिए गए है। सदिशों $z_1$ एवं $z_2$ से निर्मित कोण के अर्धक पर स्थित सम्मिश्र संख्या है–

(A) $z = \frac{(3+2\sqrt{3})}{2} + \frac{\sqrt{3}+2}{2}i$ (B) $z = 5 + 5\,i$

(C) $z = -1 - i$ (D) इनमें से कोई नहीं

**22.** सम्मिश्र समतल में दो वक्रों $|z - 3| = 2$ और $|z| = 2$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु है–

(A) $\frac{1}{2}\left(7 \pm i\sqrt{3}\right)$ (B) $\frac{1}{2}\left(3 \pm i\sqrt{7}\right)$ (C) $\frac{3}{2} \pm i\sqrt{\frac{7}{2}}$ (D) $\frac{7}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}}$

**23.** सम्मिश्र समतल में समीकरणों $|z - 2| = 3$ और $|z - 2 - 3i| = 4$ से प्रदर्शित दो वृतों की मूलाक्ष का समीकरण है–

(A) $3iz - 3i\bar{z} - 2 = 0$ (B) $3iz - 3i\bar{z} + 2 = 0$ (C) $iz - i\bar{z} + 1 = 0$ (D) $2iz - 2i\bar{z} + 3 = 0$

**24.** यदि $(1 + i)\ z = (1 - i)\ \bar{z}$ हो, तो $z =$

(A) $t(1 - i),\ t\in$ (B) $t\ (1 + i),\ t\in$ (C) $\frac{t}{1+i}, t\in R^+$ (D) इनमें से कोई नहीं

---

**एक सक अधिक विकल्प सही**

**25.** यदि z एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है जो समीकरण $z^2 + z\,|z| + |z^2| = 0$ को संतुष्ट करती है तो ($\omega$और $\omega^2$ इकाई के काल्पनिक घनमूल है।)

(A) $z = k\,\omega g$ जहाँ $k\in R$ (B) $z = k\,\omega^2$ जहाँ k अऋणात्मक वास्तविक है।

(C) $z = k\,\omega$ जहाँ k धनात्म्क वास्तविक है। (D) $z = k\,\omega^2$ जहाँ $k\in R$.

**26.** यदि $2\cos\theta = x + \frac{1}{x}$ और $2\cos\varphi = y + \frac{1}{y}$ हो, तो –

(A) $x^n + \frac{1}{x^n} = 2\cos(n\theta)$ (B) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \cos(\theta - \varphi)$

(C) $xy + \frac{1}{xy} = 2\cos(\theta + \varphi)$ (D) इनमें से कोई नहीं

**27.** $i = \sqrt{-1}$ के लिए $i^n + i^{-n}$ जहाँ $n \in I$ का मान होगा –

(A) $\frac{2^n}{(1-i)^{2n}} + \frac{(1+i)^{2n}}{2^n}$ (B) $\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} + \frac{(1-i)^{2n}}{2^n}$ (C) $\frac{(1+i)^{2n}}{2^n} + \frac{2^n}{(1-i)^{2n}}$ (D) $\frac{2^n}{(1+i)^{2n}} + \frac{2^n}{(1-i)^{2n}}$

**2-B (विषयात्मक प्रश्न)**

**1.** यदि $|z - 1| = 1$ जहाँ 'z' सम्मिश्र तल में कोई बिन्दु हो, तो सिद्व कीजिए कि $\frac{z-2}{z} = i\tan$ (कोणांक z).

**2.** रेखा $a\bar{z} + \bar{a}z + b = 0$ द्वारा वास्तविक एवं काल्पनिक अक्षों के मध्य कटे हुए भाग के मध्य बिन्दु का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिये। जहां 'b' एक वास्तविक प्राचल है और 'a' एकव नियत सम्मिश्र संख्या जिसका $Re(a) \neq 0,\ Im(a) \neq 0$.

**3.** यदि सम्बन्ध $z + \bar{z} = 2\,|z - 1|$ एवं कोणांक $(z_1 - z_2) = \frac{\pi}{4}$ दोनों को $z_1$ व $z_2$ संतुष्ट करते हो, तो $(z_1 + z_2)$ का काल्पनिक भाग ज्ञात कीजिए।

**4.** यदि $\alpha$ इकाई का काल्पनिक n वां (n $\geq$ 3) मूल है तो दर्शाइये $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\alpha^r = \frac{n\alpha}{1-\alpha}$

और इस प्रकार सिद्ध कीजिये $\sum_{r=1}^{n-1}(n-r)\sin\frac{2r\pi}{n} = \frac{n}{2}\cot\frac{\pi}{n}$.

**5.** सिद्ध कीजिए कि –

(a) $\cos x + {}^nC_1\cos 2x + {}^nC_2\cos 3x + .... + {}^nC_n\cos(n+1)x = 2^n.\cos^n\frac{x}{2}.\cos\left(\frac{n+2}{2}\right)$

(b) $\sin x + {}^nC_1\sin 2x + {}^nC_2\sin 3x + .... + {}^nC_2\sin(n+1)x = 2^n.\cos^n\frac{x}{2}.\ \sin\left(\frac{n+2}{2}\right)x.$

(c) $\cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{2n+1}\right) + ....... + \cos\left(\frac{2n\pi}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}$ When $n \in N$.

**6.** मानाकि समीकरण $|z_1 - 1| = |z_2 - 1| = |z_3 - 1|$ को संतुष्ट करने वाली तीन विभिन्न सम्मिश्र संख्याएँ $z_1, z_2, z_3$ है। तथा आर्गेण्ड समतल में $z_1, z_2 z_3$ के संगत बिन्दु क्रमशः A,B एवं C है। सिद्ध कीजिए कि $z_1 + z_2 + z_3 = 3$ यदि और केवल यदि $\Delta ABC$ एक समबाहु त्रिभुज हो।

**7.** माना स्थित सम्मिश्र संख्याएँ $\alpha$ व $\beta$ तथा चार सम्मिश्र संख्या z इस प्रकार है कि $|z-\alpha|^2 + |z-\beta|^2 = k$ तो 'k' की सीमा ज्ञात कीजिए ताकि z का बिन्दुपथ एक वृत हो। वृत का केन्द्र व त्रिज्या भी ज्ञात कीजिए।

**8.** प्राचल 'a' के वास्तविक मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए कम से कम एक सम्मिश्र संख्या z = x + iy समिका $|z - ai| = a + 4$ एवं असमिका $|z - 2| < 1$ दोनों को संतुष्ट करती हो।

**9.** यदि $z_1$ व $z_2$ कोई दो स्वेच्छ सम्मिश्र संख्याएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $|z_1 + z_2| = \left|\frac{z_1}{|z_1|}|z_2| + \frac{z_2}{|z_2|}|z_1|\right|$ (ii) $|z_1 + z_2| \geq (|z_1| + |z_2|)\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|$.

**10.** माना बिन्दु A,B,C क्रमशः सम्मिश्र संख्याओं $z_1 z_2 z_3$ को सम्मिश्र समतल पर प्रदर्शित करते है। यदि त्रिभुज ABC के कोण B व C प्रत्येक $\frac{1}{2}(\pi - \alpha)$ के बराबर हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि $(z_2 - z_3)^2 = 4z_3 - z_1)(z_1 - z_2)\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

**11.** सिद्ध कीजिए कि –

(i) $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leq |$ कोणांक $z|$. (ii) $|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z|$ कोणांक $z|$.

# Exercise -3

## 3- A (स्तम्भ मिलान)

**1.** माना $\alpha, \beta, \gamma \in R$ इस प्रकार है कि $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\beta-\gamma) + \cos(y-\alpha) = -\frac{3}{2}$

| स्तम्भ -I | स्तम्भ - II |
|---|---|
| (A) $\Sigma\sin(\alpha+\beta) = \Sigma\cos(\alpha+\beta) =$ | (p) 0 |
| (B) $\Sigma\sin 3\alpha =$ | (q) $3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ |
| (C) $\Sigma\cos 3\alpha =$ | (r) $3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ |

(D) यदि $\alpha \in R$ तो $\dfrac{\Sigma \cos^3(\theta - \alpha)}{\Pi \cos(\theta + \alpha)} =$ (s) 3

**2.** माना $z_1$ | z | = 1 पर स्थित है और $z_1$ | z | =2 पर स्थित है–

| स्तम्भ - I | | स्तम्भ -II | |
|---|---|---|---|
| (A) | $\lvert z_1 + z_2 \rvert$ का महत्तम मान | (p) | 3 |
| (B) | $\lvert z_1 - z_2 \rvert$ का न्यूनतम मान | (q) | 1 |
| (C) | $\lvert 2z_1 + 3z_2 \rvert$ का न्यूनतम मान | (r) | 4 |
| (D) | $\lvert z_1 = 2z_2 \rvert$ का महत्तम मान | (s) | 5 |

## 3-B (कथन / कारण)

**3.** माना $z_1, z_2, z_3$ एक त्रिभुज के शीर्षों को दर्शाते है ।

**कथन–1:** $\dfrac{1}{z_1 - z_2} + \dfrac{1}{z_2 - z_3} + \dfrac{1}{z_3 - z_1} = 0$ जहां त्रिभुज समबाहु है।

**कथन–2:** $|z_1|^2 - z_1\bar{z}_0 - \bar{z}_1 z_0 = |z_2|^2 - z_2\bar{z}_0 = |z_3|^2 - z_3\bar{z}_0 - \bar{z}_3 z_0$, जहो $z_0$ त्रिभुज का परिकेन्द्र है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

**4.** माना $1, \alpha_1 . \alpha_2, \alpha_3, .........\alpha_{n-1}$, n इकाई में n वें मूल है।

**कथन–1:** $\sin\dfrac{\pi}{n} . \sin\dfrac{2\pi}{n} . \sin\dfrac{3\pi}{n} ........ \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

**कथन–2:** $(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)(1 - \alpha_3)..........(1 - \alpha_{n-1}) = n$.

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

**5.** **कथन–1:** समीकरण $(1 + z)^6 + z^6 = 0$ के मूल संरेख है।

**कथन–2:** यदि $z_1, z_2, z_3$ समान्तर श्रेणी में है तो $z_1, z_2, z_3$ द्वारा प्रदर्शित बिन्दु संरेख है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

**6.** **कथन–1:** यदि $a^3 + b^3 + 6abc = 8c^3$ तो a, c, b समान्तर श्रेणी में है।

**कथन–2:** तीन चार राशियों में तीन घात वाले प्रत्येक समघाती व्यंजक को तीन समघाती रेखीय व्यजंकों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

(A) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण है।
(B) कथन–1 सत्य है, कथन–2 सत्य है ; कथन–2, कथन–1 का सही स्पष्टीकरण नहीं है।
(C) कथन–1 सत्य है, कथन–2 असत्य है।
(D) कथन–1 असत्य है, कथन–2 सत्य है।

## 3-C (अनुच्छेद)

**7.** **अनुच्छेद**

माना $(1-x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + ....... + C_nx^n$ श्रेणी $C_0 + C_1 + C_2 + .....$, के योग के लिए x = 1 रखता है। श्रेणी $C_0 + C_2 + C_4 + C_6 + ......$ या $C_1 + C_3 + C_5 + ....$ के योग के लिए x = 1 एवं x = -1 रखने में प्राप्त समीकरणों को जोड़ते या घटाते है। श्रेणी $C_0 + C_3 + C_6 + .....$ या $C_1 + C_4 + C + ......$ या $C_1 + C_4 + C_7 + .......$ या $C_2 + C_5 + C_8 +.....$ के योग के लिये हम $x = 1, x = \omega\ x = \omega^2$ प्रतिस्थापित करते है और परिणामों का योग एवं अंतर लेते है। इसी प्रकार यदि अनुलग्नों का अन्तर 'p' होता है तो हम इकाई में p वें मूलों को प्रतिस्थापित करते है और योग लेते है।

**7.1** $C_0 + C_3 + C_6 + C_9 + ..... =$

(A) $\frac{1}{3}\left[2^n - 2\cos\frac{n\pi}{3}\right]$ (B) $\frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right]$ (C) $\frac{1}{3}\left[2^n - 2\sin\frac{n\pi}{3}\right]$ (D) $\frac{1}{3}\left[2^n + 2\sin\frac{n\pi}{3}\right]$

**7.2** $C_1 + C_5 + C_9 + ..... =$

(A) $\frac{1}{4}\left[2^n - 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right]$ (B) $\frac{1}{4}\left[2^n + 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}\right]$

(C) $\frac{1}{4}\left[2^n - 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}\right]$ (D) $\frac{1}{4}\left[2^n + 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}\right]$

**7.3** $C_2 + C_6 + C_{10} + ...... =$

(A) $\frac{1}{4}\left[2^n - 2^{n/2}2.\cos\frac{n\pi}{4}\right]$ (B) $\frac{1}{4}\left[2^n + 2^{n/2}2.\cos\frac{n\pi}{4}\right]$

(C) $\frac{1}{4}\left[2^n - 2^{n/2}2.\sin\frac{n\pi}{4}\right]$ (D) $\frac{1}{4}\left[2^n + 2^{n/2}2.\sin\frac{n\pi}{4}\right]$

**8.** **अनुच्छेद**

ABCD एक समचतुर्भुज है इसके विकर्ण AC व BD बिन्दु M पर प्रतिच्छेदित करते है औश्र BD = 2AC. माना बिन्दु D और M सम्मिश्र संख्याऐं 1 + i और 2 - i को क्रमशः प्रदर्शित करते है।

**8.1** बिन्दु A का सम्भव प्रदर्शन है–

(A) $3-\frac{i}{2}$ (B) $3+\frac{i}{2}$ (C) $1+\frac{3}{2}i$ (D) $3-\frac{3}{2}i$

**8.2** $e^{iz} =$

(A) $e^{-r\cos\theta}(\cos(r\cos\theta) + i\sin(r\sin\theta))$ (B) $e^{-r\cos\theta}(\sin(r\cos\theta) + i\cos(r\cos\theta))$

(C) $e^{-r\sin\theta}(\cos(r\cos\theta) + i\sin(r\ \cos\theta))$ (D) $e^{-r\sin\theta}(\sin(r\cos\theta) + i\cos(r\sin\theta))$

**8.3** यदि z रेखाखण्ड DM पर कोई बिन्दु है तो $w = e^{iz}$ जिन संकेन्द्री वृतों के मध्य का भाग है वे है–

(A) | w | = 1 | w | = 2 (B) $|w| = \frac{1}{e}$ | w | = e

(C) $|w| = \frac{1}{e^2}$, $|w| = e^2$ (D) $|w| = \frac{1}{2}$, | w | = 1

## 3-D (सत्य/असत्य कथन)

9. यदि $z = \frac{\sqrt{5+12i}+\sqrt{5-12i}}{\sqrt{5+12i}-\sqrt{5-12i}}$ तो कोणांक z का मुख्य मान $-\frac{\pi}{2}$ है।

10. यदि (2 + i)(2 + 2i) (2 + 3i) ...... (2 + ni) = x + iy हो, तो 5.8.13...... $(4 + n^2)$ का मान $(x^2 + y^2)^2$ है।

11. z का बिन्दुपथ जबकि Arg(z + i) - Arg (z - i) = $\pi/2$ प्रथम एवं चतुर्थ चतुर्थाशां में एक अर्द्धवृत $x^2 + y^2 = 1$ है।

12. यदि $\log_{1/2}\frac{|z-1|+4}{|z-1|-2} > 1$ तो z का बिन्दुपथ केन्द्र 1 + i0 तथा त्रिज्या 10 वाले वृत का बाह्म भाग है।

13. यदि $a_1, a_2, a_3.... a_n, A_1, A_2, A_3..... A_n$ k सभी वास्तविक संख्याऐं है तो समीकरण

$\frac{A_1^2}{x-a_1} + \frac{A_2^2}{x-a_2} + ........ + \frac{A_n^2}{x-z_n}$ = k का कोई काल्पनिक मूल नहीं है।

## 3-E (रिक्त स्थन की पूर्ति)

14. यदि समीकरण $x^5 - 1 = 0$ के मूल $1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ हो, तो $\frac{\omega-\alpha_1}{\omega^2-\alpha_1}.\frac{\omega-\alpha_2}{\omega^2-\alpha_2}.\frac{\omega-\alpha_3}{\omega^2-\alpha_3}.\frac{\omega-\alpha_4}{\omega^2-\alpha_4}$ का मान __________ है।

15. यदि एक n-भुजाओं वाले बहुभुत के शीर्ष $A_1, A_2, ........ A_n$ इस प्रकार है कि $\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$ हो, तो n का मान _______ है।

16. यदि $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ हो, तो | कोणांक $z_1$ - कोणांक $z_2$| का मान ________ है।

17. यदि $z_r = \cos\frac{2r\pi}{5} + i\sin\frac{2r\pi}{5}$, r = 0, 1, 2, 3, 4, ..... हो, तो $z_1.z_2.z_3.z_4.z_5$ का मान ______ है।

18. यदि $\left|\frac{z_1 - z_2}{1-\bar{z}z_2}\right| < 1$ तो $z_1, z_2$ दोनों ही वृत | z | = R के अन्तः भाग या बाह्म भाग में स्थित है। तो R = _______.

# Exercise - 4

## 4-A (पूर्ववर्ती JEE परीक्षा प्रशन)

**IIT - JEE - 2008**

1. माना A, B, C सम्मिश्र संख्याओं के तीन समुच्चय है जो निम्न प्रकार से परिभाषित है।

A = {z : Im z ≥ 1}
B = {z : |z - 2 - i| = 3}
C = {z : Re ((1 - i) z) = $\sqrt{2}$}

1.1 समुच्चय $A \cap B \cap C$ में सदस्यों की संख्या निम्न है –
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) ∞

**1.2** माना z, $A \cap B \cap C$ का कोई एक बिन्दु है। तब $|z + 1 - i|^2 + |z - 5 - i|^2$ निम्न के बीच स्थित है

(A) 25 और 29 (B) 30 और 34 (C) 35 और 39 (D) 40 और 44

**1.3** माना z, $A \cap B \cap C$ में कोई एक बिन्दु है तथा w, $|w - 2 - i| < 3$ को संतुष्ट करने वाला कोई बिन्दु है। तब, $|z| - |w| + 3$ निम्न के बीच स्थित है

(A) -6 और 3 (B) -3 और 6 (C) -6 और 6 (D) -3 और 9

---

**IIT-JEE - 2007**

**2.** एक व्यक्ति मूल बिन्दु से उत्तर–पूर्व (N 45$^0$ E ) दिशा में 3 इकाई दूरे चलता है, इसके पश्चात् उत्तर–पश्चित (N 45$^0$ W) में 4 इकाई दूरी तय करके बिन्दु P पर पहुंचता है तो बिन्दु P की आर्गेण्ड समतल में स्थिति है।

(A) $3e^{i\pi/4} + 4i$ (B) $(3 - 4i)e^{i\pi/4}$ (C) $(4 + 3i)e^{i\pi/4}$ (D) $(3 + 4i)e^{i\pi/4}$

**3.** यदि $|z| = 1$ तथा $z \neq \pm 1$ तो $\dfrac{z}{1 - z^2}$ के सभी मान स्थित है–

(A) एक रेखा जो मूल बिन्दु से नहीं गुजरती (B) $|z| = \sqrt{2}$
(C) x-अक्ष (D) y-अक्ष

**IIT-JEE -2006**

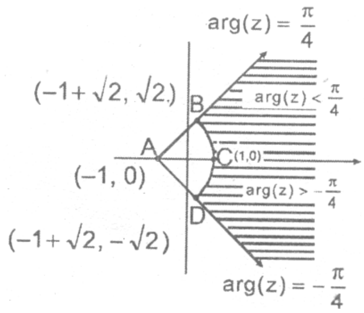
**4.** माना $\omega = \alpha + i\beta, \beta \neq 0$ और $z \neq 1$ यदि $\dfrac{\omega - \overline{\omega}z}{1 - z}$ विशुद्ध वास्तविक हो, तो z के मानों का समुच्चय है–

(A) {z : |z| = 1} (B) {z : $\overline{z}$ = z} (C) {z : |z| ≠ 1} (D) {z : |z| = 1, z ≠ 1}

---

**IIT-JEE-2005**

**5.** z का बिन्दुपथ जो छायांकित क्षेत्र (सीमाओं रहित) में स्थित हो, का श्रेष्ट निरूपण है–




(A) z : $|z + 1| > 2$ and $|\arg(z + 1)| < \pi/4$ (B) z : $|z - 1| > 2$ and $|\arg(z - 1) < \pi/4$
(C) z : $|z + 1| < 2$ and $|\arg(z + 1)\} < \pi/2$ (D) z : $|z - 1\} < 2$ and $|\arg(z - 1) < \pi/2$

**6.** a, b, c पूर्णांक संख्याएँ हैं जो कि एक साथ बराबर नहीं है और इकाई का घनमूल $\omega$ है। $(\omega \neq 1)$ तब $|z + b\omega + c\omega^2|$ का न्यूनतम मान होगा –

(A) 0 (B) 1 (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $\dfrac{1}{2}$

**7.** यदि वृत $|z - 1| = \sqrt{2}$ के परिगत निर्मित वर्ग का एक शीर्ष 2+ $\sqrt{3}$ i हो, तो वर्ग के अन्य शीर्ष ज्ञात कीजिए।

---

**IIT - JEE - 2004**

**8.** यदि इकाई का घनमूल $\omega(\neq 1)$ हो तथा $(1 + \omega^4)^n$ हो तो n का न्यूनतम धनात्मक पूर्णाकीय मान है–

(A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 6

**9.** $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = k, k \neq 1,$ जहां z = x + iy, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \beta = \beta_1 + i\beta_2,$ द्वारा दिऐ जाने वाले वृत का केन्द्र ौर त्रिज्या का मान ज्ञात कीजिए।

---

**IIT-JEE-2003**

**10.** यदि |z| = 1 और $\omega = \frac{z-1}{z+1}$ (जहाँ $z \neq -1$) हो, तो $\omega$ का वास्तविक भाग है –

(A) 0 (B) $-\frac{1}{|z+1|^2}$ (C) $\left|\frac{z}{z+1}\right| \cdot \frac{1}{|z+1|^2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{|z+1|^2}$

**11.** यदि $z_1$ और $z_2$ दो सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार है कि $|z_1| < 1 < |z_2|$, हो तब सिद्व कीजिए कि $\left|\frac{1 - z_1\bar{z}_2}{z_1 - z_2}\right| <$

**12.** सिद्ध कीजिए कि ऐसी कोई सम्मिश्र संख्या नहीं है ताकि $|z| < \frac{1}{3}$ और $\sum_{r=1}^{b} a_r z^r = 1$ जहाँ $|a_r| < 2$ हो

---

**IIT – JEE – 2002**

**13.** $|z_1| = 12$ और $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ को संतुष्ट करने वाली सभी सम्मिश्र संख्याओं $z_1, z_2$ के लिए $|z_1 - z_2|$ का न्यूनतम मान है –

(A) 0 (B) 2 (C) 7 (D) 17

**14.** माना $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ तो $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1-\omega^2 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{vmatrix} =$

(A) $3\omega$ (B) $3\omega(\omega-1)$ (C) $3\omega^2$ (D) $3\omega(1-\omega)$

**15.** एक सम्मिश्र संख्या $\alpha, \alpha \neq 1$ समीकरण $z^{p+q} - z^p z^q + 1 = 0$ का मूल है, जहां p, q भिन्न–भिन्न अभाज्य है। प्रदर्शित कीजिए कि या तो $1 + \alpha + \alpha^2 + ..... + \alpha^{p-1} = 0$ या $1 + \alpha + \alpha^2 + .....\alpha^{q-1} = 0$ किन्तु दोनों एक साथ नहीं।

---

**IIT – JEE – 2001**

**16.**

(i) $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या $z_1$, $z_2$ और $z_3$ जिस त्रिभुज के शीर्ष है, वह है–

(A) शून्य क्षेत्रफल वालीा त्रिभुज (B) समकोण समद्विबाहु त्रिभुज
(C) समबाहु त्रिभुज (D) अधिक कोण समद्विबाहु

(ii) यदि इकाई के n वें मूल $z_1$ व $z_2$ जो मूलबिन्दु पर समकोण अन्तरित करते हो तो n का मान किस रूप में होना चाहिए ?

(A) 4k + 1 (B) 4k + 2 (C) 4k + 3 (D) 4k

---

**IIT-JEE-2000**

**17.**

(a) यदि सम्मिश्र संख्याएँ $z_1, z_2, z_3$ इस प्रकार है कि $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$ हो, तो $|z_1 + z_2 + z_3|$ का मान है–

(A) 1 (B) 1 से छोटा (C) 3 से बड़ा (D) 3

(b) यदि कोणांक (z) < 0 हो, तो कोणांक (-z) - कोणांक (z) =

(A) $\pi$ (B) $-\pi$ (C) $-\frac{\pi}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

---

**IIT-JEE-1999**

**18.** यदि $i = \sqrt{-1}$ हो, तो $4 + 5\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{334} + 3\left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{365}$ का मान होगा –

(A) $1 - i\sqrt{3}$ (B) $-1 + i\sqrt{3}$ (C) $i\sqrt{3}$ (D) $-i\sqrt{3}$

**19.** सम्मिश्र संख्या z और $\omega$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $|z|^2\omega - |\omega|^2 z = z - \omega$ यदि और केवल यदि $z = \omega$ या $z\overline{\omega} = 1$.

---

**IIT-JEE-1998**

**20.**

(a) यदि $\omega$ इकाई का घनमूल हो, तो $(1 + \omega - \omega^2)^7$ का मान है–

(A) $128\omega$ (B) $-128\omega$ (C) $128\omega^2$ (D) $-128\omega^2$

(b) $\sum_{n=1}^{13}\left(i^n + i^{n+1}\right)$, जहाँ $i = \sqrt{-1}$ है, का मान है–

(A) i (B) i - 1 (C) - i (D) 0

**21.** यदि $\begin{vmatrix} 6i & -3i & 1 \\ 4 & 3i & -1 \\ 20 & 3 & i \end{vmatrix} = x + iy$, तो–

(A) x = 3, y = 1 (B) x = 1, y = 3 (C) x = 0 , y = 3 (D) x = 0, y = 0

---

**IIT-JEE-1997**

**22.** (a) माना $z_1$ और $z_2$ समीकरण $z^2 + pz + q = 0$ के मूल है जहां गुणांक p व q सम्मिश्र हो सकते है। माना A और B, $z_1$ व $z_2$ को सम्मिश्र तल पर प्रदर्शित करते है। यदि $\angle AOB = \alpha \neq 0$ और OA = OB जहां O मूल बिन्दु है। सिद्ध कीजिए $p^2 = 4\, q \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

(b) सिद्ध कीजिए $\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos\frac{2k\pi}{n} = -\frac{n}{2}$ जहां $n \le 3$ एक पूर्णांक है।

,

**23.** माना $\overline{b}z + b\overline{z} = c, b \neq 0$ सम्मिश्र तल में एक रेखा है जहां $\overline{b}, b$ का सम्मिश्र संयुग्मी है। यदि एक बिन्दु $z_1$ रेखा में बिन्दु $z_2$ का प्रतिबिम्ब है तो दर्शाइये कि $c = \overline{z}_1 b + z_2\overline{b}$

---

**IIT-JEE-1996**

**24.** धनात्मक पूर्णांकों $n_1$, $n_2$ के लिये व्यंजक का मान है $(1+i)^{n_1} + (1+i^3)n_1 + (1+i^5)^{n_2} + (1+i^7)^{n_2}$ जहां $i = \sqrt{-1}$ एक

वास्तविक संख्या है यदि और केवल यदि –

(A) $n_1 = n_2 + 1$ (B) $n_1 = n_2 - 1$ (C) $n_1 = n_2$ (D) $n_1 > 0, n_2 > 0$

**25.** व्यंजक का मान $1.(2-\omega)(2-\omega^2) + 2.(3-\omega)(3-\omega^2) + ..... + (n-1).(n-\omega)(n-\omega^2)$, (जहां $\omega$ इकाई का काल्पनिक घनमूल है) है___________.

**26.** सभी अशून्य सम्मिश्र संख्याएं ज्ञात कीजिए जो $\bar{z} = iz^2$ को संतुष्ट करती है।

---

**IIT-JEE - 1995**

**27.**

(i) यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का घनमूल है और $(1+\omega)^7 = A + B\omega$ तो A व B क्रमशः संख्याएं है–

(A) 0, 1 (B) 1, 1 (C) 1, 0 (D) -1, 1

(ii) माना Z व W दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $|z| = |w|$ और Arg Z + zrg W = $\pi$ तो Z है –

(A) W (B) -W (C) $\overline{W}$ (D) $-\overline{W}$

(iii) माना Z व W दो सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $|z| \le 1$, $|w| \le 1$ और $|z + iw| = |Z - i\overline{W}| = 2$ तो Z है–

(A) 1 या i (B) i या -i (C) 1 या -1 (D) i या -1

(iv) यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का घनमूल है तो $\begin{vmatrix} 1 & 1+i+w^2 & w^2 \\ 1-i & -1 & w^2-1 \\ -i & -i+w-1 & -1 \end{vmatrix} =$

(A) 0 (B) 1 (C) i (D) $\omega$

**28.** यदि $iz_3 + z^2 - z + i = 0$ तो दर्शाइये कि $|z| = 1$

**29.** माना z और $\omega$ दो सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $|z| \le 1$, $|\omega \le| 1$ तो, दर्शाइये कि

$z - \omega|^2 \le (|z| - |\omega|)^2 + (\text{Arg}\, z - \text{Arg}\, \omega)^2$

---

**IIT - JEE - 1994**

**30.** माना $z_1, z_2, z_3$ वृत $|z| = 2$ के अन्तः समबाहु त्रिभुज के शीर्ष है। यदि $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ तो $z_2 = .....$ और $z_3 = .......$

**4-B (पूर्ववर्ती AIEEE/DCE परीक्षा प्रश्न)**

**31.** यदि $|z + 4|$ 3 तो $|z + 1|$ का महत्तम मान है–

(A) 4 (B) 10 (C) 6 (D) 0

**32.** $\sum_{k=1}^{10}\left(\sin\frac{2k\pi}{11} + i\cos\frac{2k\pi}{11}\right)$ का मान है–

(A) 1 (B) -1 (C) - i (D) i

**33.** यदि $z^2 + z + 1 = 0$, जहां z एक सम्मिश्र संख्या है, तो

$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2 + \left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2 + \left(z_3+\frac{1}{z^3}\right) + ..... + \left(z^6+\frac{1}{z^6}\right)^2$ का मान है–

(A) 54 (B) 6 (C) 12 (D) 18

**34.** यदि इकाई के घनमूल $1, \omega, \omega^2$ है तो समीकरण $(x - 1)^3 + 8 = 0$ के मूल है–

(A) $-1, 1 + 2\omega\ 1 + 2\omega^2$ (B) $-1, 1 - 2\omega, 1-2\omega^2$

(C) $-1, -1, -1$ (D) $-1, -1 + 2\omega\ -1 - 2\omega^2$

**35.** यदि $z_1$ तथा $z_2$ दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, तो $\arg z_1 - \arg z_2$ समान है–

(A) $-\frac{\pi}{2}$ (B) $0$ (C) $-\pi$ (D) $\frac{\pi}{2}$

**36.** यदि $W = \frac{z}{z - \frac{1}{3}i}$ और $|w| = 1$, तो z स्थित है–

(A) परवलय पर (B) सरल रेखा पर (C) वृत पर (D) दीर्घवृत पर

**37.** माना z,w सम्मिश्र संख्याए इस प्रकार है कि $\bar{z} + i\bar{w} = 0$ और $\arg zw = \pi$ तो $\arg z$ का मान है–

(A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{\pi}{2}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{4}$

**38.** यदि $z = x - iy$ और $z^{1/3} = p + iq$, तो $\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \Big/ (p^2 + q^2)$ का मान है–

(A) 1 (B) -1 (C) 2 (D) -2

**39.** यदि $|z^2 - 1| = |z^2| + 1$, तो z स्थित है–

(A) वास्तविक अक्ष पर (B) काल्पनिक अक्ष पर (C) वृत्त पर (D) दीर्घवृत पर

**40.** माना $z_1$ और $z_2$ समीकरण $z^2 + az + b = 0$ के दो मूल हैं जहां z एक सम्मिश्र संख्या है तथा माना मूल बिन्दु $z_1$ और $z_2$ एक समबाहु त्रिभुज बनाते है, तो –

(A) $a^2 = b$ (B) $a^2 = 2b$ (C) $a^2 = 3b$ (D) $a^2 = 4b$.

**41.** यदि z और $\omega$ दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $|z\omega| = 1$ और $\arg(z) - \arg\omega = \frac{\pi}{2}$, तो $\bar{z}\omega$ का मान है–

(A) 1 (B) -1 (C) i (D) -i

**42.** यदि $z_r \cos\left(\frac{\pi}{2^r}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^r}\right), r = 1, 2.....$ तो $z_1 z_2 z_3......$ का मान है –

(A) -1 (B) i (C) -i (D) 1

**43.** $\left(1 + \cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1 + \cos\frac{7\pi}{8}\right)$ का मान है–

(A) $\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\cos\frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$

**44.** सम्मिश्र संख्या z = x + iy जो कि समीकरण $\left|\frac{z-5i}{z+5i}\right| = 1$ को संतुष्ट करती है, स्थित है–

(A) मूलबिन्दु से गुजरने वाले वृत्त पर (B) x-अक्ष पर
(C) सरल रेखा y = 5 पर (D) इनमें से कोई नहीं

**45.** सह सम्बन्ध (corelation) गुणांक, यदि $\bar{x} = \bar{y} = 0. \Sigma x_i y_i = 12, \sigma_x = 2, \sigma_y = 3, n = 10$ है–

(A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

**46.** सह सम्बन्ध गुणांक (r) और दो समाश्रयण गुणांक byx, bxy संबंधित है–

(A) $r = (\text{sgn}\, b_{yx})\sqrt{b_{xy}b_{yx}}$ (B) $r = b_{xy} + b_{yx}$
(C) $r = b_{xy} \times b_{yx}$ (D) $b_{xy} / b_{yx}$

**47.** यदि समाश्रयण गुणांक 0.8 और 0.2 है, तो सह सम्बन्ध गुणांक का मान है–

(A) 0.164 (B) 0.04 (C) 0.4 (D) 0.16

**48.** -1 के घनमूलों का गुणनफल है –

(A) -2 (B) 0 (C) -1 (D) 4

**49.** यदि सम्मिश्र संख्याएं iz, z तथा z + iz एक त्रिभुज के तीन शीर्षों को प्रदर्शित करते है तो त्रिभुज का क्षेत्रफल है–

(A) $\frac{1}{2}|z-1|$ (B) $|z|^2$ (C) $\frac{1}{2}|z|^2$ (D) $|z-1|^2$

**50.** दीर्घवृत $5x^2 - 9y^2 = 32$ पर बिन्दु (2, 3) से कितनी स्पर्श रेखाएं खींच सकते है ?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

**51.** समान्तर श्रेढ़ी में सम्मिश्र संख्याएं $z_1, z_2$ और $z_3$

(A) दीर्घवृत पर स्थित है। (B) परवलय पर स्थित है। (C) रेखा पर स्थित है। (D) वृत पर स्थित है

**52.** यदि $\sin^3 x \sin 3x = \sum_{m=0}^{n} C_m \cos mx$ 'x' में एक सर्वसमिका है जहां $C_0, C_1, \ldots. C_n$ नियतांक है और $C_n \neq 0$, तो n का मान है–

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

**53.** यदि $z = x + iy$ $z^{1/3} = z - in$ और $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = k(a^2 - b^2)$ तो k का मान है–

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 1

**54.** यदि सम्मिश्र संख्या 4 - 3i का मापांक तीन गुना कर दिया जाता है तथा इसे बामावर्त दिशा में कोण $\pi$ से घुमाया जाता है तो परिणामी सम्मिश्र संख्या होगी–

(A) -12 + 9i (B) 12 + 9i (C) 7 - 6i (D) 7 + 6i

**55.** सम्मिश्र संख्याए $z_1,z_2,z_3$ जो कि $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$ को संतुष्ट करती है, तो त्रिभुज है–

(A) समबाहु (B) समकोणीय
(C) न्यूनकोणीय (D) अधिक कोणीय

**56.** यदि $|z - 2 - 3i| + |z + 2 - 6i| = 4$ जहां $i = \sqrt{-1}$ तो P(z) का बिन्दुपथ है–
(A) एक दीर्घवृत (B) $\phi$
(C) 2 + 3i ; - 2 + 6i को मिलाने वाला रेखाखण्ड (D) इनमें से कोई नहीं

**57.** सभी सम्मिश्र संख्याओं $z_1,z_2$ जो कि $|z_1| = 12$ और $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ को संतुष्ट करती है, के लिये $|z_1 - z_2|$ का मान है–
(A) 0 (B) 2 (C) 7 (D) 13

**58.** यदि $z_1,z_2$ और $z_3$ सम्मिश्र संख्याएं इस प्रकार है कि $|z_1| = |z_2| = |z_3| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right| = 1$ तो $|z_1 + z_2 + z_3|$ है–
(A) 1 के बराबर (B) 1 के कम (C) 3 से बड़ा (D) 3 बराबर

# Answers

**EXERCISE # 1 –A**

**1. A 2. C 3. B 4. D 5. D 6. A 7. A**

**8. A 9. A 10. A 11. A 12. C 13. C 14. C**

**15. C 16. C 17. B 18. D 19. BCD 20. ABC**

**21. ACD 22. AB 23. ABCD**

**EXERCISE # 1 –B**

**1.** 3, -1

**2.** (A) $|Z| = 2\,\text{COS}\frac{9\pi}{25}$ Principal Arg $z = \frac{9\pi}{25}$,

arg z = $\frac{9\pi}{25} + 2k\pi, k \in I$

(b) Modulus = 2, Arg = $2k\pi - \frac{5\pi}{6}, k \in I,$

Principal Arg = $-\frac{5\pi}{6}$

**3.** (i) $\pm(4 + 3i)$ (ii) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(3 + i)$

**4.** (a) $\frac{21}{5} - \frac{12}{5}i$ (b) 3 + 4 i

(c) $\frac{1}{2\left(1 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}\right)} + i\frac{-\cot\frac{\theta}{2}}{1 + 3\cos^2\frac{\theta}{2}}$

**6.** (i) $(a - ib)^2$

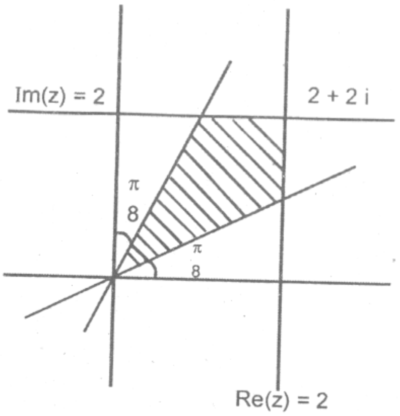
**8.** (a) संकेन्द्री वृतों के बीच का भाग जिनका केन्द्र (0, 2) तथा त्रिज्याएं 1 व 3 इकाई है।
(b) सम्मिश्र समतल का वह भाग जो रेखा y = 1 पर या उसके ऊपर है।
(c) (c) एक किरण जो कि बिन्दु (3 + 4i) से निकलती है। तथा मूल बिन्दू से दूर जाती है और उसका समीकरण

$$\sqrt{3}x - y + 4 - 3\sqrt{3} = 0. x > 3$$

**9.** $\sqrt{5}+2$ & $\sqrt{5}-2$

**10.** (i) 0, 6 (ii) 1, 7 (iii) 0, 5

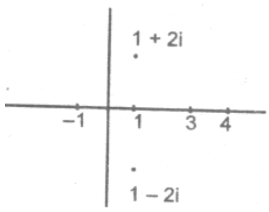
**11.**




**14.** (i) |z| = 20 (ii)OP = OQ = PR = QR = 20

**15.** (i) 4 (ii) $\sqrt{3}$

**17.** z = - 1, 3, 1 – 2 I, 1 + 2 i




योग =4, केन्द्रक =1

**19.** (i) – 1

(ii) $e^{(6n+1)\frac{\pi}{4}i}$, n = 0, 1, 2, 3 सतत् गुणनफल = 1

**20.** 5 **21.** $-4-3i, 2\sqrt{5}$

**EXERCISE # 2- A**

**1. B 2. B 3. B 4. D 5. A 6. D 7. D**

**8. B 9. A 10. D 11. C 12. A 13. C 14. C**

**15. A 16. C 17. A 18. A 19. D 20. C 21. B**

**22. B 23. B 24. A 25. BC 26. ABC 27. BD**

**EXERCISE # 2 –B**

**2.** $\overline{az}+az=0$ **3.** 2 **7.** $k \ge \frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2$

**8.** $\left(-\frac{21}{10}, -\frac{5}{6}\right]$

**EXERCISE # 3**

**1.** (A) → (p), (B) → (q), (C) → (r) (D) → (s)

**2.** (A) → (p), (B) → (q), (C) → (r) (D) → (s)

**3. B 4. A 5. B 6. C 7.1 B 7.2 D 7.3 A**

**8.1 A 8.2 C 8.3 B 9.** False **10.** False

**11.** True **12.** True **13.** True **14.** ω **15.** 7

**16.** $\frac{\pi}{2}$ **17.** 1 **18.** 1

**EXERCISE # 4**

**1.1 B 1.2 C 1.3 BCD 2. D 3. D 4. D**

**5. A 6. B 7.** $-i\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}+i, \sqrt{3}-i$

**8. B 9.** $\left(\frac{K^2\beta-\alpha}{k^2-1}\right), \left|\frac{k(\alpha-\beta)}{1-k^2}\right|$

**10. A 13. B 14. B 16.** (i) C (ii) D

**17.** (a) A (b) A **18. C 20.** (a) D (b) B

**21. D 24. D 25.** $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - n$

**26.** $0+i, \frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}i, \frac{-\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}i$

**27.** (i) B (ii) D (iii) C (iv) A

**30.** $z_2=-2, z_3=1-i\sqrt{3}$ **31. C 32. C 33. C**

**34. B 35. BD 36. B 37. C 38. D 39. B 40. C**

**41. D 42. D 43. C 44. A 45. C 46. D 47. B**

**48. C 49. C 50. C 51. C 52. C 53. B 54. A**

**55. A 56. B 57. B 58. A**

**EXERCISE # 1 (बहुविकल्पीय प्रश्न)**

**केवल एक विकल्प सही**

**1.** यदि $1, \alpha, \alpha^2, , ..........., \alpha^{n-1}$ इकाई के n वें मूल हो, तो $(3-\alpha)(3-\alpha^2)(3-\alpha^3).......(3-\alpha^{n-1})$ का मान है–

(A) n (B) 0 (C) $\frac{3^n - 1}{2}$ (D) $\frac{3^n + 1}{2}$

**2.** यदि द्विघात समीकरण $(1 + i) x^2 - (7 + 3i) x + (6 + 8i) = 0$ का एक मूल 4 - 3i है, तो इसका दूसरा मूल है–

(A) 1 + i (B) 4 + 3i (C) 1 - i (D) कोई नहीं

**3.** यदि P तथा P' क्रमशः सम्मिश्र संख्या $z_1$ तथा इसके योज्य प्रतिलोम को प्रदर्शित करते है, तो उस वृत का सम्मिश्र समीकरण, जिसका व्यास PP' है, है–

(A) $\frac{z}{z_1} = \overline{\left(\frac{z_1}{z}\right)}$ (B) $z\bar{z} + z_1\bar{z}_1 = 0$ (C) $z\bar{z}_1 + \bar{z}z_1 = 0$ (D) इनमें से कोई नहीं

**4.** यदि z = x + iy, कोणांक (z - 1) = कोणांक (z + 3) को संतुष्ट करता है, तो (x - 1) : y है–

(A) 2 : 1 (B) 1 : 3 (C) -1 : 3 (D) कोई नहीं

**5.** माना $z(\neq)$ का एक सम्मिश्र संख्या इस प्रकार है कि $\log_{1/2}|z-2| > \log_{1/2}|z|$, तो

(A) Re(z) > 1 (B) Im (z) > 1 (C) Re(z) = 1 (D) Im (z) = 1

**6.** $z^3 + \bar{z} = 0$ के हलों की संख्या है –

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

**7.** यदि $iz^3 + z^2 - z + i = 0$, तो | z | =

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

**8.** यदि a > 0 तथा समीकरण $|z - a^2| + |z - 2a| = 3$ एक दीर्घवृत को निरूपित करती है, तो a है –

(A) (1, 3) (B) $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ (C) (0, 3) (D) (1, $\sqrt{3}$ )

**9.** यदि $w \neq 1$ इकाई का n वां मूल है, तो $\sum_{l=0}^{n-1} |z_1 + w^k z_2|^2$ का मान है–

(A) $n(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ (B) $|z_1|^2 + |z_2|^2$ (C) $(|z_1| + |z_2|^2)$ (D) $n(|z_1| + |z_2|)^2$

**10.** यदि $|z_1| = 2, |z_2| = 3, |z_3| = 4$ तथा $|2z_1 + 3z_2 + 4Z_3| = 4$ है, तो $8z_2z_3 + 27z_3z_1 + 64z_1z_2$ का निरपेक्ष मान है–

(A) 24 (B) 48 (C) 72 (D) 96

**11.** यदि $z_1, z_2, z_3$ तीन सम्मिश्र संख्याऐं इस प्रकार है कि $4z_1 - 7z_2 + 3z_3 = 0$ है, तो $z_1, z_2, z_3$ है–

(A) विषमबाहु त्रिभुज के शीर्ष (B) समकोण त्रिभुज के शीर्ष
(C) वृतीय बिन्दु (D) संरेखीय

**12.** -2 + 2i का $(\cos\theta + i \sin\theta)$ वाला रूप है–

(A) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$
(B) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
(C) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$
(D) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

**13.** यदि z = x + i y तो सरल रेखा की समीकरण Ax + By + C = 0 जहाँ A,B,C, ∈ R, को सम्मिश्र तल में $\bar{a}z + a\bar{z}2C = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है तो 'a' है–
(A) $\frac{(A+iB)}{2}$ (B) $\frac{A-iB}{2}$ (C) A + i B (D) कोई नहीं

**14.** सम्मिश्र तल में बिन्दुओं का समुच्चय, जो |z| ≤ 4 और कोणांक $z = \frac{\pi}{3}$ दोनों को संतुष्ट करें, है–
(A) एक वृत तथा एक रेखा (B) एक वृत की त्रिज्या
(C) एक वृतीय खण्ड (D) एक अनन्त रेखा का भाग

**15.** यदि $z_1, z_2, z_3, ......z_n$ एक वृत |z| = 2 स्थित है, तो
$$E = |z_1 + z_2 + ....... + z_n| - 4\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + ........ + \frac{1}{z_n}\right|$$
(A) 0 (B) n (C) -n (D) कोई नहीं

**16.** यदि z = 2 + 3 i, तो व्यंजक $z^4 - z^3 + 10z^2 + 3z - 5$ का मान एक वास्तविक संख्या है–
(A) 122 (B) -122 (C) 160 (D) -160

**17.** z में समीकरण $z\bar{z} - (3+i)z - (3-i)\bar{z} - 6 = 0$ के हलों की संख्या है–
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) अनन्त

**18.** यदि $1 + x^2 = \sqrt{3}\,x$, तो $\sum_{n=1}^{24}\left(x^n - \frac{1}{x^n}\right) =$
(A) 48 (B) -48 (C) $\pm 48(\omega - \omega^2)$ (D) कोई नहीं

**19.** यदि $\omega(\neq 1)$ इकाई का घनमूल है, तो $\begin{vmatrix} 1 & 1+i+\omega^2 & \omega^2 \\ 1-i & -1 & \omega^2-1 \\ -i & -i+\omega-1 & -1 \end{vmatrix} =$
(A) 0 (B) 1 (C) i (D) $\omega$

---

**एक से अधिक विकल्प सही**

**20.** यदि $z_1, z_2, z_3, z_4$ समीकरण $a_0z^4 + a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z^2 + a_3z + a_4 = 0$ के मूल है, जहाँ $a_0, a_1, a_2, a_3$ तथा $a_4$ वास्तविक है तो–
(A) $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$ भी समीकरण के मूल है।
(B) $z_1$ कम से कम $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$ के बराबर है।
(C) $-\bar{z}_1, -\bar{z}_2, -\bar{z}_3, -\bar{z}_4$ भी समीकरण के मूल है।
(D) कोई नहीं

**21.** वर्ग ABCD के क्रमागत शीर्ष वामावर्त दिशा में लिये गये हैं। यदि शीर्ष A सम्मिश्र संख्या z द्वारा प्रदर्शित है तथा विकर्णों का प्रतिच्छेद बिन्दु मूलबिन्दु है, तो–
(A) शीर्ष B सम्मिश्र संख्या iz द्वारा प्रदर्शित है।
(B) शीर्ष D सम्मिश्र संख्या $i\bar{z}$ प्रदर्शित है।
(C) शीर्ष B सम्मिश्र संख्या $i\bar{z}$ द्वारा प्रदर्शित है।
(D) शीर्ष D सम्मिश्र संख्या - iz द्वारा प्रदर्शित है।

**22.** यदि $\alpha$ समीकरण $z^5 + z^3 + z + 3 = 0$ का मूल है तो –
(A) $|\alpha| \geq 1$
(B) $|\alpha| < 1$
(C) $\alpha$, इकाई वृत $|z| = 1$ के बाहर स्थित है।
(D) $\alpha$, इकाई वृत $|z| = 1$ के अन्दर स्थित है।

**23.** $z = \dfrac{3}{2 + \cos\theta + i\sin\theta}, \theta \in R$ द्वारा प्रदर्शित वक्र –
(A) काल्पनिक अक्ष को कभी नहीं मिलता ।
(B) वास्तविक अक्ष को केवल दो बिन्दुओं पर मिलता है।
(C) |z| का अधिकतम मान 3 है।
(D) |z| का न्यूनतम मान 1 है।

**24.** यदि g(x) तथा h(x) दो वास्तविक बहुपद इस प्रकार है कि बहुपद $g(x^3) + xh(x^3)$, $x^2 + x + 1$ से विभाजित है, तो –
(A) g(1) = h(1) = 0
(B) $g(1) = h(1) \neq 0$
(C) g(1) = - h(1)
(D) g(1) + h(1) = 0

**25.** दो सम्मिश्र संख्याऐं $z_1$ तथा $z_2$ प्रतिबंध $\left|\dfrac{z_1 - z_2}{1 - \bar{z}_1 z_2}\right| = 1$ को संतुष्ट करती है, यदि –
(A) $|z_1| = 1$
(B) $|z_2| = 1$
(C) $z_1 = e^{i\theta}$, $\theta \in R$
(D) $z_2 = e^{i\theta}$, $\theta \in R$

## EXERCISE # 2 (विषयात्मक प्रषन)

**1.** माना $A_i$ (i = 1, 2, .......n) एक इकाई त्रिज्या वाले वृत के अंतर्गत n-भुजा वाले समबहुभुज के शीर्ष है, तो ज्ञात कीजिए–
(A) $|A_1A_4|^2 + |A_1A_3|^2 + ...... + |A_1A_n|^2$
(ii) $|A_1A_2| . |A_1A_3| ....... |A_1A_n|$

**2.** प्रदर्शित कीजिए कि इकाई के n वे मूलों की p वीं घातों का योग
(a) शून्य है, यदि p, n का गुणज नहीं है।
(b) n के बराबर है, यदि p, n का गुणज है।

**3.** सिद्ध कीजिए कि समीकरण $(x - 1)^n = x^n$ के मूल $\left(1 + i\cot\dfrac{r\pi}{r}\right)$ है, जहाँ
r = 0, 1m 2, ........(n - 1) & $n \in N$.

**4.** यदि $\alpha, \beta, \gamma$ समीकरण $x^3 - 3x^2 + 3x + 7 = 0$ के मूल हैं तथा $\omega$ इकाई का काल्पनिक घनमूल है तो $\dfrac{\alpha - 1}{\beta - 1} + \dfrac{\beta -}{\gamma - 1} + \dfrac{\gamma - 1}{\alpha - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए–

**5.** प्रदर्शित कीजिए कि समीकरण $a_1z^3 + a_2z^2 + a_3z + a_3z + a_4 = 3$ के सभी मूल जहाँ $|a_i| \leq 1$, i = 1, 2, 3, 4 उस वृत के बाहर स्थित है, जिसका केन्द्र मूलबिन्दु तथा त्रिज्या 2/3 है।

**6.** दिया गया है $z_1 + z_2 + z_3 = A$, $z_1 + z_2\omega + z_3\omega^2 = B$, $z_1 + z_2\omega^2 + z_3\omega = C$ जहाँ $\omega$ इकाई का घनमूल है, तो
(a) $z_1, z_2, z_3$ को A,B,C के पदों में व्याक्त कीजिए।
(b) सिद्ध कीजिए $|A|^2 + |B|^2 + |C|^2 = 3\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right)$.

(c) सिद्ध कीजिए, $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = 27z_1z_2z_3$

**7.** यदि $\alpha$ तथा $\beta$ दो सम्मिश्र संख्याएं है, तो सिद्ध कीजिए–

(i) $|\alpha+\beta|^2 + |\alpha-\beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|^2)$

(ii) $\left|\alpha - \sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right| + \left|\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right| = |\alpha+\beta| + |\alpha-\beta|.$

**8.** सम्मिश्र संख्याओं a,b,c द्वारा निरूपित बिन्दु, वृ जिसका केन्द्र O तथा त्रिज्या r है, पर स्थित है। बिन्दु c पर खींची गई स्पर्श रेखा बिन्दुओं a,b को मिलाने वाली जीवा को z पर काटती है, तो प्रदर्शित कीजिए $z = \dfrac{a^{-1}+b^{-1}-2c^{-1}}{a^{-1}b^{-1}-c^{-2}}$

**9.** द्विघात समीकरण $z^2 + (p + ip')z + q + iq' = 0$; जहाँ p,p',q'q' सभी वास्तविक है, के संदर्भ में सिद्ध कीजिए।

(a) यदि समीकरण का एक वास्तविक मूल है, तो $p'^2 - pp'q' + qp'^2 = 0$.

(b) यदि समीकरण के दो मूल समान हो, तो $p^2 - p'^2 = 4q$ & $pp' = 2q'$.
यदि भी बताइये कि ये समान मूल वास्तविक या काल्पनिक है।z

**10.** सरल कीजिए: $\displaystyle\sum_{p=1}^{32}(3p+2)\left(\sum_{q=1}^{10}\left(\sin\frac{2q\pi}{11} - i\cos\frac{2q\pi}{11}\right)\right)^p$

**11.** यदि $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{7}}$ तथा $f(x) = A_0 + \displaystyle\sum_{k=1}^{20} A_k x^k$, तो $f(x) + f(\alpha x) + ........ + f(\alpha^6 x)$, का $\alpha$ से स्वतंत्र मान ज्ञात कीजिए।

**12.** दिया गया है $z = \cos\dfrac{2\pi}{2n+1} + i\sin\dfrac{2\pi}{2n+1}$,'n' धनात्मक पूर्णांक है, तो समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसके मूल $\alpha = z + z^3 + ....... + z^{2n-1}$ तथा $\beta = z^2 + z^4 + ........ + z^{2n}$ है।

**13.** समीकरण $z^{12} - 56z^6 - 512 = 0$ के वे सभी मूल ज्ञात कीजिए, जिनका काल्पनिक भाग धनात्मक है।

# Answers

**EXERCISE # 1**

**1.** C **2.** A **3.** A **4.** D **5.** A **6.** D **7.** D
**8.** C **9.** A **10.** D **11.** D **12.** B **13.** C **14.** B
**15.** A **16.** B **17.** D **18.** D **19.** A **20.** AB
**21.** AD **22.** AC **23.** ABCD **24.** ACD **25.** ABCD

**EXERCISE # 2**

**1.** (i) 2n (ii) n **4.** $3\omega^2$

**6.** (a) $z_1 = \dfrac{A+B+C}{3}, z_2 = \dfrac{A+B\omega_2+C\omega}{3}$

$z_3 = \dfrac{A+B\omega+C\omega^2}{3}$

**10.** 48 (1- i)

**11.** $7A_0 + 7A_7x^7 + 7A_{14}x^{14}$

**12.** $z^2 + z + \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin^2\theta} = 0$, where $\theta = \dfrac{2\pi}{2n+1}$

**13.** $\pm 1 + i\sqrt{3}, \dfrac{(\pm\sqrt{3}+i)}{\sqrt{2}}, \sqrt{2i}$

# For 39 Yrs. Que. of IIT-JEE
# &
# 15 Yrs. Que. of AIEEE
# We have distributed already a book